Language: **Japanese**

Day: **2**

2024 年 *4* 月 *14* 日日曜日

問題 4. $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ をみたす整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ がある. $1 \leq i < j \leq n$ をみたす整数 i, j に対して組 (a_i, a_j) が**面白い**とは, $1 \leq k < \ell \leq n$ をみたす整数 k, ℓ が存在して,

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2$$

が成り立つことをいう. 3 以上の整数 n それぞれに対して, 面白い組の個数としてありうる最大の値を求めよ.

問題 5. 正の整数全体からなる集合を $\mathbb{N}$ で表す. 関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ であって, 任意の正の整数 x, y に対して以下の条件がともに成り立つようなものをすべて求めよ：

(i) x の正の約数の個数は, $f(x)$ の正の約数の個数に等しい.

(ii) x が y を割り切らず, かつ y が x を割り切らないとき,

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y))$$

が成り立つ.

ここで, 正の整数 m, n に対して, m と n をともに割り切る最大の正の整数を $\gcd(m, n)$ で表す.

問題 6. 以下の条件をみたす正の整数 d をすべて求めよ：

実数係数 d 次多項式 P であって, $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(d^2 - d)$ に現れる値が高々 d 種類であるようなものが存在する.

時間：4 時間 30 分
各問 7 点