



Language: Italian

Day: 2

Domenica, 14 aprile 2024

Problema 4. Per una sequenza $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ di interi una coppia (a_i, a_j) con $1 \leq i < j \leq n$ è detta *interessante* se esiste una coppia (a_k, a_ℓ) di interi con $1 \leq k < \ell \leq n$ tale che

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Per ogni $n \geq 3$, trovare il più grande numero possibile di coppie interessanti presenti in una sequenza di lunghezza n .

Problema 5. Sia \mathbb{Z}_+ l'insieme degli interi positivi. Trovare tutte le funzioni $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ che soddisfano le seguenti condizioni per ogni coppia di interi positivi (x, y) :

- (i) x e $f(x)$ hanno lo stesso numero di divisori positivi.
- (ii) Se x non divide y e y non divide x , allora

$$\text{MCD}(f(x), f(y)) > f(\text{MCD}(x, y)).$$

Ricordiamo che $\text{MCD}(m, n)$ è il più grande intero positivo che divide sia m che n .

Problema 6. Trovare tutti gli interi positivi d per i quali esiste un polinomio P di grado d a coefficienti reali tale che fra i numeri $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ compaiono al massimo d valori distinti.