Language: **Hungarian**

Day: **2**

2024. április 14. vasárnap

Feladat 4. Egy egészekből álló $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ sorozatban egy (a_i, a_j) párt, ahol $1 \leq i < j \leq n$ *érdekesnek* nevezünk, ha létezik egy egészekből álló (a_k, a_ℓ) pár, ahol $1 \leq k < \ell \leq n$ úgy, hogy

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Minden $n \geq 3$-ra határozzuk meg az érdekes párok lehetséges legnagyobb számát egy n hosszú sorozatban.

Feladat 5. Jelölje $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egészek halmazát. Keressük meg az összes olyan $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvényt, ahol tetszőleges (x, y) pozitív egészekből álló számpárra az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

(i) x és $f(x)$ pozitív osztóinak száma megegyezik.

(ii) Ha x nem osztja y-t és y nem osztja x-et, akkor

$$\mathrm{lnko}(f(x), f(y)) > f(\mathrm{lnko}(x, y)).$$

Itt lnko(m, n) *az a legnagyobb pozitív egész, ami osztja* m*-et és* n*-et is.*

Feladat 6. Keressük meg az összes olyan d pozitív egész számot, melyre létezik egy d-edfokú valós együtthatós P polinom, melyre $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(d^2 - d)$ között legfeljebb d különböző érték fordul elő.

Idő: 4 óra 30 perc
Minden feladat 7 pontot ér