



Language: **Greek**

Day: **2**

Κυριακή, 14 Απριλίου, 2024

Πρόβλημα 4. Για μια ακολουθία $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ακέραιων αριθμών, ένα ζεύγος (a_i, a_j) με $1 \leq i < j \leq n$ ονομάζεται *ενδιαφέρον* εάν υπάρχει ζεύγος (a_k, a_ℓ) με $1 \leq k < \ell \leq n$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Για κάθε $n \geq 3$, να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος από ενδιαφέροντα ζεύγη σε μια ακολουθία μήκους n .

Πρόβλημα 5. Έστω \mathbb{N} το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοιες, ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων (x, y) :

- (i) Ο x και ο $f(x)$ έχουν το ίδιο πλήθος θετικών διαιρετών.
- (ii) Αν ο x δεν διαιρεί τον y και ο y δεν διαιρεί τον x , τότε

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

Εδώ ο $\gcd(m, n)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n .

Πρόβλημα 6. Βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς d για τους οποίους υπάρχει πολυώνυμο P βαθμού d με πραγματικούς συντελεστές τέτοιο, ώστε να υπάρχουν το πολύ d διαφορετικές τιμές ανάμεσα στις $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$.