



Language: German

Day: 2

Sonntag, 14. April 2024

**Aufgabe 4.** Für eine Folge  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  von ganzen Zahlen heiße (heisse) ein Paar  $(a_i, a_j)$  mit  $1 \leq i < j \leq n$  *interessant*, falls es ein Paar  $(a_k, a_\ell)$  mit  $1 \leq k < \ell \leq n$  gibt, sodass

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Bestimme für jedes  $n \geq 3$  die grtmogliche (grösstmögliche) Anzahl interessanter Paare in einer Folge der Länge  $n$ .

**Aufgabe 5.** Sei  $\mathbb{N}$  die Menge der positiven ganzen Zahlen. Bestimme alle Funktionen  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , sodass für alle Paare  $(x, y)$  positiver ganzer Zahlen die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $x$  und  $f(x)$  haben die gleiche Anzahl von positiven Teilern.
- (ii) Falls  $y$  nicht durch  $x$  teilbar ist und  $x$  nicht durch  $y$  teilbar ist, dann gilt

$$\text{ggT}(f(x), f(y)) > f(\text{ggT}(x, y)).$$

*Anmerkung:*  $\text{ggT}(m, n)$  bezeichne die grte (grösste) positive ganze Zahl, die  $m$  und  $n$  teilt.

**Aufgabe 6.** Bestimme alle positiven ganzen Zahlen  $d$ , für die es ein Polynom  $P$  von Grad  $d$  mit reellen Koeffizienten gibt, sodass unter  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$  höchstens  $d$  verschiedene Werte sind.