Dimanche 14 avril 2024

Problème 4. Pour une suite d'entiers $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, une paire $\{a_i, a_j\}$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$ est appelée *stupéfiante* s'il existe une paire d'entiers $\{a_k, a_\ell\}$ avec $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$ telle que

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Pour tout $n \geqslant 3$, déterminer le plus grand nombre possible de paires stupéfiantes dans une suite de longueur n.

Problème 5. Soit $\mathbb{N}_{>0}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$ telles que les conditions suivantes sont satisfaites pour toute paire d'entiers strictement positifs $\{x, y\}$:

(i) x et $f(x)$ ont le même nombre de diviseurs positifs.

(ii) Si x ne divise pas y et si y ne divise pas x, alors

$$PGCD(f(x), f(y)) > f(PGCD(x, y)).$$

On note $PGCD(m, n)$ le plus grand entier positif divisant à la fois m et n.

Problème 6. Déterminer tous les entiers strictement positifs d pour lesquels il existe un polynôme à coefficients réels P de degré d tel que l'ensemble $\{P(0), P(1), P(2), \ldots, P(d^2 - d)\}$ comporte au plus d valeurs distinctes.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points