



Language: Finnish

Day: 2

Sunnuntai, 14.4.2024

Tehtävä 4. Kokonaislukujen jonossa $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, lukupari (a_i, a_j) , jossa $1 \leq i < j \leq n$, on *mielenkiintoinen*, jos on olemassa kokonaislukupari (a_k, a_ℓ) , jossa $1 \leq k < \ell \leq n$, jolla pätee

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Jokaiselle $n \geq 3$, etsi suurin mahdollinen mielenkiintoisten lukuparien määrä n -pituisessa jonossa.

Tehtävä 5. Olkoon \mathbb{N} positiivisten kokonaislukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, joilla seuraavat ehdot ovat tosia kaikilla positiivisten kokonaislukujen pareilla (x, y) :

- (i) Luvulla x ja funktiolla $f(x)$ on sama määrä positiivisia tekijöitä.
- (ii) Jos x ei ole luvun y tekijä ja y ei ole luvun x tekijä, niin silloin

$$\text{syt}(f(x), f(y)) > f(\text{syt}(x, y)).$$

Tässä $\text{syt}(m, n)$ on suurin positiivinen kokonaisluku, joka jakaa molemmat m ja n .

Tehtävä 6. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut d , joille on olemassa d -asteinen reaalilukukertoiminen polynomi P , jolla on enintään d eri arvoa joukossa $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$.

Language: Finnish

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen