



Language: Dutch

Day: 2

Zondag 14 april 2024

Opgave 4. Voor een rij $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ van gehele getallen noemen we een paar (a_i, a_j) with $1 \leq i < j \leq n$ *interessant* als er een paar gehele getallen (a_k, a_ℓ) met $1 \leq k < \ell \leq n$ bestaat zo dat

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Vind voor elke $n \geq 3$ het grootst mogelijke aantal interessante paren in een rij van lengte n .

Opgave 5. Zij \mathbb{N} de verzameling (strikt) positieve gehele getallen. Vind alle functies $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zo dat voor elk paar positieve gehele getallen (x, y) aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:

- (i) x en $f(x)$ hebben hetzelfde aantal positieve delers.
- (ii) Als y niet door x deelbaar is en x niet door y deelbaar is, dan geldt dat

$$\text{ggd}(f(x), f(y)) > f(\text{ggd}(x, y)).$$

Hier staat $\text{ggd}(m, n)$ voor het grootste positieve gehele getal dat zowel m als n deelt.

Opgave 6. Vind alle (strikt) positieve gehele getallen d waarvoor er een polynoom van graad d met reële coëfficiënten bestaat zo dat er onder de getallen $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ hooguit d verschillende waardes zijn.