



Language: Danish

Day: 2

Søndag d. 14. april 2024

Opgave 4. Lad $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ være en følge af hele tal. Et par (a_i, a_j) , hvor $1 \leq i < j \leq n$, kaldes *interessant* hvis der findes et par (a_k, a_ℓ) af hele tal med $1 \leq k < \ell \leq n$ så

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Bestem for hvert $n \geq 3$ det størst mulige antal interessante par i en følge af længde n .

Opgave 5. Lad \mathbb{N} være mængden af positive hele tal. Bestem alle funktioner $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ så de følgende betingelser er opfyldt for alle par af positive hele tal (x, y) :

(i) x og $f(x)$ har samme antal positive divisorer.

(ii) Hvis x ikke går op i y , og y ikke går op i x , da er

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

Her er $\gcd(m, n)$ det største positive hele tal der går op i både m og n .

Opgave 6. Find alle positive hele tal d for hvilke der findes et polynomie P af grad d med reelle koefficienter så der højst er d forskellige værdier blandt tallene $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$.