



Language: Czech

Day: 2

neděle 14. dubna 2024

Úloha 4. Pro posloupnost $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ celých čísel nazveme dvojici (a_i, a_j) , kde $1 \leq i < j \leq n$, *zajímavou*, jestliže existuje taková dvojice (a_k, a_ℓ) celých čísel, kde $1 \leq k < \ell \leq n$, že

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Pro každé $n \geq 3$ určete největší možný počet zajímavých dvojic v posloupnosti délky n .

Úloha 5. Označme \mathbb{N} množinu všech kladných celých čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že pro libovolnou dvojici (x, y) kladných celých čísel platí

- (i) x a $f(x)$ mají stejný počet kladných dělitelů.
- (ii) Jestliže x není dělitelem y a y není dělitelem x , pak

$$D(f(x), f(y)) > f(D(x, y)).$$

Symbol $D(m, n)$ značí největší celé číslo, které dělí každé z čísel m a n .

Úloha 6. Určete všechna kladná celá čísla d , pro která existuje polynom P stupně d s reálnými koeficienty takový, že mezi $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ je nejvýše d různých hodnot.