



Language: Croatian

Day: 2

*Nedjelja, 14. travnja 2024.*

**Zadatak 4.** U nizu  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  cijelih brojeva, za par  $(a_i, a_j)$  uz  $1 \leq i < j \leq n$  kažemo da je *zanimljiv* ako postoji par  $(a_k, a_\ell)$  uz  $1 \leq k < \ell \leq n$  takav da je

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Za svaki  $n \geq 3$ , nađi najveći mogući broj zanimljivih parova u nizu duljine  $n$ .

**Zadatak 5.** Neka je  $\mathbb{N}$  skup pozitivnih cijelih brojeva. Nađi sve funkcije  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takve da sljedeći uvjeti vrijede za sve parove pozitivnih cijelih brojeva  $(x, y)$ :

(i)  $x$  i  $f(x)$  imaju isti broj pozitivnih djelitelja.

(ii) Ako  $x$  ne dijeli  $y$  i  $y$  ne dijeli  $x$ , tada

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

Ovdje  $\gcd(m, n)$  označava najveći pozitivan cijeli broj koji dijeli  $m$  i  $n$ .

**Zadatak 6.** Nađi sve pozitivne cijele brojeve  $d$  za koje postoji polinom  $P$  stupnja  $d$  s realnim koeficijentima takav da među brojevima  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$  postoji najviše  $d$  različitih vrijednosti.