



Language: Chinese (Traditional)

Day: 2

2024 年 4 月 14 日 星期日

問題 4. 對一個整數數列 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ，我們稱數對 (a_i, a_j) 為有趣數對，其中 $1 \leq i < j \leq n$ ，如果存在整數數對 (a_k, a_ℓ) 滿足 $1 \leq k < \ell \leq n$ 且

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

對於每個 $n \geq 3$ ，試決定在一個 n 項數列中找到的有趣數對之最大可能數量。

問題 5. 設 \mathbb{N} 為所有正整數所成的集合。試找出所有函數 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ，使得對任意正整數數對 (x, y) ，下列敘述皆成立：

- (i) x 和 $f(x)$ 有相同數量的正因數。
- (ii) 若 x 不整除 y 且 y 也不整除 x ，則

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

這裡 $\gcd(m, n)$ 是同時整除 m, n 的最大正整數。

問題 6. 試找出所有正整數 d ，滿足有一個 d 次的實係數多項式 P ，使得 $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ 中至多有 d 個相異值。