



Language: Chinese (Traditional)

Day: 2

2024 年 4 月 14 日 星期日

**問題 4.** 對一個整數數列  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ，我們稱數對  $(a_i, a_j)$  為有趣數對，其中  $1 \leq i < j \leq n$ ，如果存在整數數對  $(a_k, a_\ell)$  滿足  $1 \leq k < \ell \leq n$  且

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

對於每個  $n \geq 3$ ，試決定在一個  $n$  項數列中找到的有趣數對之最大可能數量。

**問題 5.** 設  $\mathbb{N}$  為所有正整數所成的集合。試找出所有函數  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ，使得對任意正整數數對  $(x, y)$ ，下列敘述皆成立：

- (i)  $x$  和  $f(x)$  有相同數量的正因數。
- (ii) 若  $x$  不整除  $y$  且  $y$  也不整除  $x$ ，則

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

這裡  $\gcd(m, n)$  是同時整除  $m, n$  的最大正整數。

**問題 6.** 試找出所有正整數  $d$ ，滿足有一個  $d$  次的實係數多項式  $P$ ，使得  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$  中至多有  $d$  個相異值。

Language: Chinese (Traditional)

考試時間：4 小時 30 分  
每題 7 分