



Language: Chinese (Simplified)

Day: 2

2024 年 4 月 14 日, 星期日

**题目 4.** 对一个整数数列  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , 称一个数对  $(a_i, a_j)$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) 是有趣的, 如果存在另外一个数对  $(a_k, a_\ell)$  ( $1 \leq k < \ell \leq n$ ) 满足

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

固定整数  $n \geq 3$ , 求一个  $n$  项整数数列中有趣数对个数的最大可能值.

**题目 5.** 设  $\mathbb{N}_+$  为所有正整数的集合. 求所有函数  $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$  满足: 对每个正整数数对  $(x, y)$ , 均有

(i)  $x$  和  $f(x)$  有相同数量的正因子,

(ii) 如果  $x$  不整除  $y$  且  $y$  也不整除  $x$ , 那么

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

这里  $\gcd(m, n)$  表示同时整除  $m$  和  $n$  的最大正整数.

**题目 6.** 求所有正整数  $d$ , 使得存在一个  $d$  次实系数多项式  $P$  满足:

$$P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$$

中至多有  $d$  个不同的值.