



Language: **Ukrainian**

Day: **1**

Субота, 13 квітня, 2024

Задача 1. На дошці записано два різних цілих числа u і v . Ми виконуємо послідовність кроків. На кожному кроці ми робимо одну з таких двох операцій:

- (i) Якщо a і b – різні цілі числа на дошці, то ми можемо записати на дошку число $a + b$, якщо його там ще немає.
- (ii) Якщо a, b і c – три попарно різних цілих числа на дошці і ціле число x є коренем рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то ми можемо записати на дошці число x , якщо його там ще немає.

Знайдіть всі пари початкових чисел (u, v) , для яких будь-яке ціле число може бути написане на дошці після скінченної послідовності кроків.

Задача 2. У трикутнику ABC відомо, що $AC > AB$. Нехай Ω – його описане коло, а точка I – центр його вписаного кола. Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до сторін BC, CA, AB в точках D, E, F , відповідно. Позначимо через X і Y відповідно – дві точки на менших дугах \widehat{DF} і \widehat{DE} вписаного кола, для яких $\angle BXD = \angle DYC$. Прямі XY та BC перетинаються в точці K . Нехай T – точка на колі Ω така, що пряма KT є дотичною до кола Ω , і точки T та A знаходяться по один бік від прямої BC . Доведіть, що прямі TD і AI перетинаються на колі Ω .

Задача 3. Назвемо натуральне число n *дивним*, якщо, для будь-якого додатного дільника d числа n , число $d(d+1)$ є дільником числа $n(n+1)$. Доведіть, що для будь-яких чотирьох попарно різних дивних чисел A, B, C і D , справджується рівність

$$\text{НСД}(A, B, C, D) = 1.$$

Тут через $\text{НСД}(A, B, C, D)$ позначено найбільше натуральне число, яке ділить кожне з чисел A, B, C і D .