Sábado, 13 de abril de 2024

Problema 1. Dos enteros distintos u y v están escritos en la pizarra. Realizamos una serie de pasos. En cada paso hacemos una de las siguientes acciones:

(i) Si a y b son enteros distintos en la pizarra, entonces podemos escribir $a + b$ en la pizarra, si no está ya escrito.

(ii) Si a, b y c son tres enteros distintos en la pizarra, y x es un entero que satisface $ax^2 + bx + c = 0$, entonces podemos escribir x en la pizarra, si no está ya escrito.

Determine todas las parejas iniciales de números (u, v) para las cuales cualquier entero se puede escribir en la pizarra después de un número finito de pasos.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $AC > AB$, y denotamos su circunferencia circunscrita por Ω y su incentro por I. Sean D, E, F los puntos de intersección de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA, AB, respectivamente. Sean X e Y dos puntos en los arcos más cortos $\widehat{DF}$ y $\widehat{DE}$ de la circunferencia inscrita, respectivamente, tales que $\angle BXD = \angle DYC$. Las rectas XY y BC se intersecan en K. Sea T el punto en Ω tal que KT es tangente a Ω y T está en el mismo lado de la recta BC que A. Demuestre que las rectas TD y AI se intersecan en Ω.

Problema 3. Decimos que un entero positivo n es *peculiar* si, para cualquier divisor positivo d de n, el entero $d(d + 1)$ divide a $n(n + 1)$. Demuestre que para cualesquiera cuatro enteros positivos peculiares distintos A, B, C y D, se cumple lo siguiente:

$$\operatorname{mcd}(A, B, C, D) = 1.$$

Aquí $\operatorname{mcd}(A, B, C, D)$ *es el mayor entero positivo que divide a* A, B, C *y* D*.*

Tiempo: 4 houras y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos