



Language: **Slovenian**

Day: **1**

Sobota, 13. april 2024

Naloga 1. Na tabli sta napisani dve različni celi števili u in v . Izvedemo zaporedje korakov, pri čemer v vsakem koraku naredimo eno izmed naslednjih dveh potez:

- (i) Če sta a in b različni celi števili na tabli, lahko na tablo napišemo $a + b$, če tega števila še ni tam.
- (ii) Če so a, b in c tri različna števila na tabli in če za celo število x velja $ax^2 + bx + c = 0$, lahko na tablo napišemo x , če tega števila še ni tam.

Določi vse začetne pare števil (u, v) , za katere lahko na tabli v končnem številu korakov dobimo poljubno celo število.

Naloga 2. Naj bo ABC trikotnik, pri čemer je $|AC| > |AB|$. Z Ω označimo njegovo očrtano krožnico ter z I središče včrtane krožnice trikotnika. Včrtana krožnica se dotika stranic BC, CA, AB zaporedoma v D, E, F . Naj bosta X in Y zaporedoma dve točki na krajših lokih \widehat{DF} in \widehat{DE} včrtane krožnice, tako da velja $\angle BXD = \angle DYC$. Naj se premici XY in BC sekata v točki K . Naj bo T takšna točka na Ω , da je KT tangenta na Ω in da T leži na isti strani premice BC kot A . Dokaži, da se premici TD in AI sekata na Ω .

Naloga 3. Naravno število n je *svojevrstno*, če za vsak pozitiven delitelj d števila n celo število $d(d+1)$ deli $n(n+1)$. Dokaži, da za poljubna štiri različna svojevrstna naravna števila A, B, C in D velja:

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

Pri tem je $\gcd(A, B, C, D)$ največje naravno število, ki deli vsakega izmed števil A, B, C in D .