



Language: **Slovak**

Day: **1**

sobota, 13. apríla 2024

**Úloha 1.** Na tabuli sú napísané dve rôzne celé čísla  $u$  a  $v$ . Postupne vykonáme niekoľko krokov. V každom kroku vykonáme jednu z nasledujúcich dvoch operácií:

- (i) Ak  $a, b$  sú rôzne celé čísla na tabuli a ešte na nej nie je napísané celé číslo  $a + b$ , tak ho na ňu napíšeme.
- (ii) Ak  $a, b, c$  sú tri rôzne celé čísla na tabuli a celé číslo  $x$ , ktoré ešte nie je napísané na tabuli, spĺňa rovnosť  $ax^2 + bx + c = 0$ , tak na tabuľu zapíšeme celé číslo  $x$ .

Určte všetky počiatkové dvojice  $(u, v)$  celých čísel také, že pre ľubovoľné celé číslo existuje konečná postupnosť krokov, po ktorých bude toto celé číslo napísané na tabuli.

**Úloha 2.** Nech  $ABC$  je trojuholník, v ktorom platí  $|AC| > |AB|$ , a označme  $\Omega$  kružnicu jemu opísanú a  $I$  stred kružnice jemu vpísanej. Kružnica vpísaná trojuholníku  $ABC$  sa dotýka strán  $BC, CA, AB$  postupne v bodoch  $D, E, F$ . Nech  $X$  a  $Y$  sú postupne dva body na kratších oblúkoch  $\widehat{DF}$  a  $\widehat{DE}$  vpísanej kružnice také, že  $|\angle BXD| = |\angle DYC|$ . Priamka  $XY$  pretína priamku  $BC$  v bode  $K$ . Nech  $T$  je taký bod na kružnici  $\Omega$ , že priamka  $KT$  sa dotýka kružnice  $\Omega$  a bod  $T$  leží na rovnakej strane priamky  $BC$  ako bod  $A$ . Dokážte, že priamky  $TD$  a  $AI$  sa pretínajú na kružnici  $\Omega$ .

**Úloha 3.** Kladné celé číslo  $n$  nazvime *prapodivné*, ak pre ľubovoľného kladného deliteľa  $d$  čísla  $n$  je číslo  $d(d + 1)$  deliteľom čísla  $n(n + 1)$ . Dokážte, že pre ľubovoľné štyri rôzne prapodivné kladné celé čísla  $A, B, C$  a  $D$  platí:

$$\text{NSD}(A, B, C, D) = 1.$$

*Zápis*  $\text{NSD}(A, B, C, D)$  označuje najväčšie celé číslo, ktoré je deliteľom každého z čísel  $A, B, C$  a  $D$ .