



Language: **Serbian**

Day: **1**

subota, 13.4.2024.

Zadatak 1. Na tabli su napisana dva različita cela broja u i v , i izvršava se niz koraka. U svakom koraku vrši se jedna od sledeće dve operacije:

- (i) Ako su a i b različiti celi brojevi na tabli, onda na tablu pišemo i broj $a + b$, ako već prethodno nije bio napisan.
- (ii) Ako su a , b i c tri različita cela broja na tabli, i ako ceo broj x zadovoljava $ax^2 + bx + c = 0$, onda na tablu pišemo i x , ako već prethodno nije bio napisan.

Odrediti sve parove početnih brojeva (u, v) za koje važi da se svaki ceo broj može napisati na tablu posle konačno mnogo koraka.

Zadatak 2. Neka je ABC trougao za koji važi $AC > AB$. Označimo sa Ω njegovu opisanu kružnicu, a sa I centar njene upisane kružnice. Upisana kružnica dodiruje stranice trougla BC , CA , AB u tačkama D , E , F , respektivno. Neka su X i Y dve tačke na kraćim lukovima \widehat{DF} i \widehat{DE} upisane kružnice, respektivno, tako da je $\angle BXD = \angle DYC$. Označimo presek pravih XY i BC sa K . Neka je T tačka na Ω takva da je prava KT tangenta Ω , i T i A su sa iste strane prave BC . Dokazati da se prave TD i AI seku na Ω .

Zadatak 3. Prirodan broj n je *čudan*, ako za svaki pozitivan delilac d broja n važi da $d(d + 1)$ deli $n(n + 1)$.

Dokazati da za svaka četiri različita čudna prirodna broja A , B , C i D , važi:

$$\text{nzd}(A, B, C, D) = 1.$$

Ovde $\text{nzd}(A, B, C, D)$ označava najveći prirodan broj koji deli sve brojeve A , B , C i D .