Language: **Russian**

Day: **1**

Суббота, 13 апреля, 2024

Задача 1. На доске записаны два различных целых числа u и v. Мы выполняем последовательность шагов. На каждом шаге мы выполняем одну из следующих двух операций:

(i) Если a, b — это два различных числа, записанных на доске, то мы можем написать на доске число $a+b$, если этого числа еще нет на доске.

(ii) Если a, b, c — это три попарно различных числа, записанных на доске, и если целое число x удовлетворяет условию $ax^2+bx+c=0$, то можно написать на доске число x, если этого числа еще нет на доске.

Определите все пары начальных чисел (u, v), с помощью которых любое целое число в конце концов может быть записано на доске после конечной последовательности шагов.

Задача 2. Дан треугольник ABC, причем $AC > AB$. Обозначим через Ω окружность, описанную около этого треугольника, и через I обозначим центр вписанной окружности этого треугольника. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Пусть X и Y — две точки соответственно на малых дугах $\widehat{DF}$ и $\widehat{DE}$ вписанной окружности такие, что $\angle BXD = \angle DYC$. Пусть прямые XY и BC пересекаются в точке K. Пусть T — точка на Ω такая, что T лежит по одну сторону от прямой BC, что и точка A, и прямая KT касается Ω в точке T. Докажите, что прямые TD и AI пересекаются на окружности Ω.

Задача 3. Назовём натуральное число n *необычным*, если $d(d+1)$ делит $n(n+1)$ для любого натурального делителя d числа n. Докажите, что для любых четырех попарно различных необычных чисел A, B, C и D выполнено равенство

$$\text{НОД}(A, B, C, D) = 1.$$

Здесь НОД(A, B, C, D) обозначает наибольшее натуральное число, которое делит A, B, C и D.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов