



Language: Romanian

Day: 1

Sâmbătă, 13 aprilie 2024

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise două numere întregi diferite u și v . Facem pași succesivi. La fiecare pas facem una dintre următoarele operații:

- (i) Dacă a și b sunt numere diferite de pe tablă, scriem pe tablă $a + b$, dacă acest număr nu era deja scris.
- (ii) Dacă a , b și c sunt trei numere de pe tablă, diferite două câte două și dacă un număr întreg x verifică $ax^2 + bx + c = 0$, atunci îl scriem pe x pe tablă, dacă nu era deja scris.

Determinați toate perechile inițiale (u, v) pentru care putem face ca să fie scris pe tablă orice număr întreg, după un număr finit de pași.

Problema 2. În triunghiul ABC , cu $AC > AB$, cercul circumscris este notat Ω și centrul cercului înscris este notat I . Fie D, E, F contactele cercului înscris cu laturile BC, CA , respectiv AB ale triunghiului. Fie X și Y două puncte pe arcele mici \widehat{DF} , respectiv \widehat{DE} ale cercului înscris, astfel încât $\angle BXD = \angle DYC$. Fie K intersecția dreptei XY cu dreapta BC . Fie T punctul de pe Ω pentru care KT este tangentă la Ω , iar T și A sunt de aceeași parte a dreptei BC . Demonstrați că dreptele TD și AI se taie într-un punct situat pe Ω .

Problema 3. Vom spune că numărul natural nenul n este *ciudat* dacă, pentru orice divizor pozitiv d al lui n , numărul $d(d + 1)$ divide numărul $n(n + 1)$. Demonstrați că, pentru orice patru numere naturale nenule ciudate A, B, C și D , diferite două câte două, are loc relația

$$\text{c.m.m.d.c.}(A, B, C, D) = 1.$$

Notația $\text{c.m.m.d.c.}(A, B, C, D)$ desemnează cel mai mare număr natural care divide A, B, C și D .