Sábado, 13 de abril de 2024

Problema 1. Dois inteiros distintos u e v são escritos em um quadro. Realizamos uma sequência de etapas. A cada etapa, podemos fazer uma das duas operações seguintes:

(i) Se a e b são inteiros distintos no quadro, podemos escrever o inteiro $a+b$ no quadro, caso ele não esteja já escrito.

(ii) Se a, b e c são três inteiros distintos no quadro e se x é um inteiro que satisfaz $ax^2+bx+c=0$, podemos escrever o inteiro x no quadro, caso ele não esteja já escrito.

Determine todos os pares iniciais (u, v) a partir dos quais qualquer inteiro pode ser escrito no quadro depois de um número finito de etapas.

Problema 2. Seja ABC um triângulo com $AC > AB$ com circuncírculo Ω e incentro I. O incírculo intersecta os lados BC, CA, AB em D, E, F respectivamente. Sejam X e Y dois pontos nos arcos menores $\widehat{DF}$ e $\widehat{DE}$ do incírculo, respectivamente, tal que $\angle BXD = \angle DYC$. A reta XY intersecta a reta BC em K. Seja T o ponto em Ω tal que KT é tangente à Ω e T está do mesmo lado da reta BC que A. Prove que as retas TD e AI se intersectam em Ω.

Problema 3. Um inteiro positivo n é dito *peculiar* se, para qualquer divisor positivo d de n, o inteiro $d(d+1)$ divide $n(n+1)$. Mostre que, para qualquer quatro inteiros positivos peculiares distintos A, B, C e D, vale a seguinte afirmação:

$$\operatorname{mdc}(A, B, C, D) = 1.$$

Nota: mdc(A, B, C, D) é o maior inteiro positivo que divide cada um dos inteiros A, B, C e D.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos