Sobota, 13 kwietnia 2024

Zadanie 1. Na tablicy napisano dwie różne liczby całkowite, u i v. Następnie wykonujemy ciąg operacji. W każdym kroku wykonujemy jedną z dwóch opisanych operacji:

(i) Jeśli na tablicy znajdują się dwie różne liczby całkowite a i b, wówczas możemy dopisać na tablicy liczbę $a+b$, o ile nie było jej tam wcześniej.

(ii) Jeśli a, b i c są trzema różnymi liczbami całkowitymi na tablicy, oraz jeśli liczba całkowita x spełnia $ax^2 + bx + c = 0$, wówczas możemy dopisać x na tablicy, o ile nie było go tam wcześniej.

Wyznaczyć wszystkie pary początkowych liczb (u, v), takie że dla dowolnej liczby całkowitej da się ją otrzymać na tablicy po skończonej liczbie kroków.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC > AB$. Niech Ω oznacza okrąg opisany na ABC, zaś I środek okręgu wpisanego. Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego do boków BC, CA, AB odpowiednio przez D, E, F. Niech X i Y będą dwoma punktami, odpowiednio na krótszych łukach $\widehat{DF}$ oraz $\widehat{DE}$ okręgu wpisanego, takimi że $\angle BXD = \angle DYC$. Proste XY i BC przecinają się w punkcie K. Niech T będzie takim punktem na Ω, że prosta KT jest styczna do Ω oraz T leży po tej samej stronie prostej BC co punkt A. Wykazać, że proste TD oraz AI przecinają się na Ω.

Zadanie 3. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *dziwną*, jeśli dla dowolnego dodatniego dzielnika d liczby n, liczba $d(d+1)$ dzieli $n(n+1)$. Udowodnić, że dla dowolnych czterech różnych dziwnych dodatnich liczb całkowitych A, B, C, D zachodzi:

$$\mathrm{NWD}(A, B, C, D) = 1.$$

Tutaj NWD(A, B, C, D) oznacza największą dodatnią liczbę całkowitą, która dzieli wszystkie liczby A, B, C i D.

Czas pracy: 4 godziny 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów