Lørdag 13. april 2024

Oppgave 1. To forskjellige heltall u og v er skrevet på en tavle. Vi utfører en rekke steg, og i hvert steg gjør vi en av følgende to operasjoner:

(i) Dersom a og b er to forskjellige heltall på tavlen, så skriver vi $a+b$ på tavlen dersom det ikke allerede står der.

(ii) Dersom a, b og c er tre forskjellige heltall på tavlen, og dersom heltallet x oppfyller $ax^2+bx+c=0$, så skriver vi x på tavlen dersom det ikke allerede står der.

Finn alle startpar (u, v) slik at det for etthvert heltall er mulig å skrive det på tavlen etter et endelig antall steg.

Oppgave 2. La ABC være en trekant der $|AC| > |AB|$, og la Ω være trekantens omsirkel og I være trekantens innsenter. La innsirkelen tangere sidene BC, CA, AB i henholdsvis D, E, F. La X være et punkt på den korteste av sirkelbuene $\widehat{DF}$ i innsirkelen, og la Y være et punkt på den korteste av sirkelbuene $\widehat{DE}$ i innsirkelen, slik at $\angle BXD = \angle DYC$. La K være skjæringspunktet til linjene XY og BC. La T være punktet på Ω slik at KT tangerer Ω, og T er på samme side av linjen BC som A. Vis at skjæringspunktet til linjene TD og AI ligger på Ω.

Oppgave 3. Vi kaller et positivt heltall n *merkelig* dersom det gjelder at for alle positive divisorer d av n så vil også $d(d+1)$ dele $n(n+1)$. Vis at for fire vilkårlige forskjellige merkverdige positive heltall A, B, C og D så gjelder det at:

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

Her er $\gcd(A, B, C, D)$ *det største positive heltallet som deler alle tallene* A, B, C *og* D.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng