



Language: **Lithuanian**

Day: **1**

2024 m. balandžio 13 d., šeštadienis

Uždavinys 1. Lentoje užrašyti du skirtingi sveikieji skaičiai u ir v . Atliename ėjimus. Kiekvienu ėjimu galime atlikti vieną iš dviejų, žemiau apibūdintų, operacijų:

- (i) Jeigu a ir b yra skirtingi sveikieji skaičiai ant lentos, tada ant lentos galime parašyti $a + b$, jei tokio skaičiaus ten dar nėra.
- (ii) Jeigu a, b ir c yra trys skirtingi sveikieji skaičiai ant lentos ir sveikasis skaičius x tenkina lygtį $ax^2 + bx + c = 0$, tada ant lentos galime parašyti x , jei tokio skaičiaus ten dar nėra.

Raskite visas pradines skaičių poras (u, v) , tokias, kad bet kokią sveikąją skaičių ant lentos galėtume parašyti per baigtinį ėjimų skaičių.

Uždavinys 2. Duotas trikampis ABC , $AC > AB$. Jo apibrėžtinį apskritimą žymėsime Ω , o įbrėžtinio apskritimo centrą - I . Įbrėžtinis apskritimas liečia kraštines BC, CA, AB atitinkamai taškuose D, E, F . Duota, kad X ir Y yra du taškai ant atitinkamai trumpesniųjų įbrėžtinio apskritimo lankų \widehat{DF} ir \widehat{DE} , tokie, kad $\angle BXD = \angle DYC$. Tiesė XY kerta tiesę BC taške K . Duota, kad T yra toks taškas ant Ω , kad KT yra apskritimo Ω liestinė ir T yra toje pačioje tiesės BC pusėje, kaip ir A . Įrodykite, kad tiesės TD ir AI kertasi ant Ω .

Uždavinys 3. Sveikąjį teigiamą skaičių n vadinsime *keistu* jeigu, su bet koku teigiamu skaičiaus n dalikliu d , sveikasis skaičius $d(d+1)$ dalija $n(n+1)$. Įrodykite, kad su bet kuriais keturiais skirtingais keistais teigiamais sveikaisiais skaičiais A, B, C ir D , galioja:

$$DBD(A, B, C, D) = 1.$$

Čia $DBD(A, B, C, D)$ yra didžiausias teigiamas sveikasis skaičius, kuris dalija visus A, B, C ir D .