2024 年 *4* 月 *13* 日土曜日

問題 1. 相異なる 2 つの整数 u, v が黒板に書かれている. ここから, 以下の 2 つの操作のうちいずれかを行うことを繰り返す：

(i) 黒板に書かれている相異なる 2 つの整数 a, b に対して, $a+b$ がまだ黒板に書かれていないとき, $a+b$ を黒板に書き加える.

(ii) 黒板に書かれている相異なる 3 つの整数 a, b, c に対して, 整数 x が $ax^2+bx+c=0$ をみたし, かつ x がまだ黒板に書かれていないとき, x を黒板に書き加える.

相異なる 2 つの整数からなる組 (u, v) であって, どの整数も有限回の操作を繰り返すことで黒板に書かれた状態にできるようなものをすべて求めよ.

問題 2. $AC > AB$ をみたす三角形 ABC があり, その外接円を Ω, 内心を I とする. また, 三角形 ABC の内接円と辺 BC, CA, AB の接点をそれぞれ D, E, F とする. 三角形 ABC の内接円の劣弧 $\widehat{DF}$ 上の点 X と劣弧 $\widehat{DE}$ 上の点 Y が $\angle BXD = \angle DYC$ をみたしている. 直線 XY と直線 BC は点 K で交わっている. Ω 上の点 T は直線 BC に関して A と同じ側にあり, 直線 KT は Ω に接している. このとき, 直線 TD と直線 AI は Ω 上で交わることを示せ.

問題 3. 正の整数 n が**奇妙**であるとは, n の任意の正の約数 d に対して, $d(d+1)$ が $n(n+1)$ を割り切ることをいう. 任意の相異なる 4 つの奇妙な正の整数 A, B, C, D に対して,

$$\gcd(A, B, C, D) = 1$$

が成り立つことを示せ.

ここで, A, B, C, D のすべてを割り切る最大の正の整数を $\gcd(A, B, C, D)$ で表す.

時間：4 時間 30 分
各問 7 点