2024 GEORGIA
EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD

Language: **Italian**

Day: **1**

Sabato, 13 aprile 2024

Problema 1. Due interi distinti u e v sono scritti sulla lavagna. Eseguiamo una sequenza di mosse. Ad ogni mossa facciamo una delle due operazioni seguenti:

(i) Dati a e b interi distinti scritti sulla lavagna, possiamo scrivere $a+b$ sulla lavagna, se non è già presente.

(ii) Dati a, b e c tre interi distinti scritti sulla lavagna, se un intero x soddisfa $ax^2+bx+c=0$ possiamo scrivere x sulla lavagna, se non è già presente.

Determinare tutte le coppie di numeri iniziali (u, v) a partire dalle quali ogni intero può essere scritto sulla lavagna dopo un numero finito di mosse.

Problema 2. Sia ABC un triangolo con $AC > AB$ ed indichiamo con Ω la sua circonferenza circoscritta e con I il suo incentro. La circonferenza inscritta al triangolo ABC incontra i lati BC, CA ed AB in D, E e F rispettivamente. Siano X e Y due punti sulla circonferenza inscritta appartenenti agli archi minori $\widehat{DF}$ e $\widehat{DE}$ rispettivamente, tali che $\angle BXD = \angle DYC$. La retta XY interseca la retta BC nel punto K. Sia T il punto di Ω tale che KT è tangente ad Ω e T è dalla stessa parte di A rispetto alla retta BC. Dimostrare che le rette TD e AI si intersecano su Ω.

Problema 3. Diciamo che un intero positivo n è *peculiare* se, per ogni divisore positivo d di n, l'intero $d(d+1)$ divide $n(n+1)$. Dimostrare che, per qualsiasi quaterna A, B, C e D di interi positivi peculiari distinti, vale

$$\mathrm{MCD}(A, B, C, D) = 1.$$

Ricordiamo che $\mathrm{MCD}(A, B, C, D)$ *è il più grande intero positivo che divide i quattro numeri* A, B, C *e* D*.*

Language: Italiano

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti