*2024. április 13. szombat*

**Feladat 1.** Két különböző $u$ és $v$ egész szám fel van írva egy táblára. Elvégezzük lépések egy sorozatát. Minden lépésben az alábbi két művelet egyikét csináljuk:

(i) Ha $a$ és $b$ különböző egészek amik fent vannak a táblán, akkor felírhatjuk $a + b$-t a táblára, ha még nincs fent a táblán.

(ii) Ha $a, b$ és $c$ három különböző egész szám amik fent vannak a táblán, és az $x$ egész számra $ax^2 + bx + c = 0$ teljesül, akkor felírhatjuk $x$-et a táblára, ha még nincs fent a táblán.

Határozzuk meg az összes olyan kezdő $(u, v)$ számpárt, amiből kiindulva bármely egész szám fel tud kerülni a táblára véges sok lépés után.

**Feladat 2.** Legyen $ABC$ egy háromszög amiben $AC > AB$, a körülírt körét jelölje $\Omega$, a beírt körének középpontját pedig $I$. A beírt kör érintse a $BC, CA, AB$ oldalakat rendre a $D, E, F$ pontokban. Az $X$ és $Y$ pontok rendre a beírt kör rövidebbik $\wideparen{DF}$ és rövidebbik $\wideparen{DE}$ ívén helyezkednek el úgy, hogy $BXD\sphericalangle = DYC\sphericalangle$. Az $XY$ egyenesnek és a $BC$ egyenesnek a metszéspontja legyen $K$. Legyen $T$ az a pont az $\Omega$-n, melyre $KT$ érinti $\Omega$-t és a $T$ pont a $BC$ egyenes ugyanazon oldalán helyezkedik el, mint az $A$ pont. Bizonyítsuk be, hogy a $TD$ és $AI$ egyenesek metszéspontja az $\Omega$-n van.

**Feladat 3.** Egy $n$ pozitív egészet *különösnek* nevezünk, ha az $n$ tetszőleges pozitív $d$ osztójára a $d(d + 1)$ egész szám osztja $n(n + 1)$-et. Bizonyítsuk be, hogy bármely négy különböző $A$, $B$, $C$ és $D$ különös pozitív egészekre a következő teljesül:

$$\mathrm{lnko}(A, B, C, D) = 1.$$

*Itt lnko$(A, B, C, D)$ azt a legnagyobb pozitív egészet jelöli, ami $A, B, C$ és $D$ mindegyikét osztja.*