



Language: Hebrew

Day: 1

יום שבת, 13 באפריל, 2024

שאלה 1. שני מספרים שלמים, u ו- v , כתובים על הלוח. אנחנו מבצעים סדרת צעדים. בכל שלב אנחנו יכולות לבחור מאחת מ-2 אפשרויות:

- (i) אם a, b שני מספרים שונים שכתובים על הלוח, ניתן להוסיף את $a + b$ ללוח, אם הוא לא כתוב כבר.
(ii) אם a, b, c שלושה מספרים שונים שכתובים על הלוח, ואם קיים מספר שלם x כך שמתקיים $ax^2 + bx + c = 0$, ניתן לכתוב את x על הלוח, אם הוא לא כתוב כבר.

מצאו את כל זוגות המספרים ההתחלתיים (u, v) כך שלכל מספר שלם y , ניתן לכתוב אותו על הלוח לאחר מספר צעדים סופי.

שאלה 2. נתון משולש ABC עבורו $AC > AB$, נסמן את המעגל החוסם שלו ב- Ω , ואת מרכז המעגל החוסם ב- I . המעגל החוסם משיק לצלעות AB, CA, BC בנקודות D, E, F בהתאמה. נתונות נקודות X ו- Y על הקשתות הקצרות \widehat{DE} ו- \widehat{DF} של המעגל החוסם, בהתאמה, כך שמתקיים $\angle BXD = \angle DYC$. נסמן ב- K את נקודת חיתוך הישרים XY ו- BC . נסמן ב- T את הנקודה על Ω כך ש- KT משיק ל- Ω ו- T באותו צד של הישר BC כמו A . הוכיחו שהישרים TD ו- AI נפגשים על Ω .

שאלה 3. נקרא למספר שלם חיובי n משונה אם לכל מחלק חיובי d של n , המספר $d(d + 1)$ מחלק את $n(n + 1)$. הוכיחו שלכל רביעיית מספרים משונים A, B, C, D מתקיים:

$$\gcd(A, B, C, D) = 1$$

כאן $\gcd(A, B, C, D)$ הוא המספר השלם החיובי הגדול ביותר שמחלק את כל המספרים A, B, C, D .

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות