Language: **Greek**

Day: **1**

Σάββατο, 13 Απριλίου, 2024

Πρόβλημα 1. Δύο διαφορετικοί ακέραιοι αριθμοί u και v είναι γραμμένοι σε έναν πίνακα. Εκτελούμε μια ακολουθία βημάτων. Σε κάθε βήμα κάνουμε μια από τις ακόλουθες δύο ενέργειες:

(i) Εάν οι a και b είναι διαφορετικοί αριθμοί στον πίνακα, τότε μπορούμε να γράψουμε τον $a+b$ στον πίνακα, αν δεν είναι ήδη εκεί.

(ii) Εάν οι a, b και c είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί στον πίνακα, και αν ο ακέραιος αριθμός x ικανοποιεί την $ax^2+bx+c=0$, τότε μπορούμε να γράψουμε τον x στον πίνακα, αν δεν είναι ήδη εκεί.

Να βρείτε όλα τα ζεύγη των αρχικών αριθμών (u, v) από τα οποία μπορεί τελικά να γραφεί στον πίνακα οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός, μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ένα τρίγωνο ABC με $AC > AB$, ο περιγεγραμμένος κύκλος του Ω και το έγκεντρο του I. Έστω ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου εφάπτεται στις πλευρές του BC, CA, AB στα σημεία D, E, F, αντίστοιχα. Έστω X και Y δύο σημεία στα μικρά τόξα $\widehat{DF}$ και $\widehat{DE}$ του εγγεγραμμένου κύκλου, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\angle BXD = \angle DYC$. Έστω ότι η ευθεία XY τέμνει την ευθεία BC στο K. Έστω T το σημείο του Ω τέτοιο, ώστε η KT να είναι εφαπτόμενη στον Ω, και το T να βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας BC με το σημείο A. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες TD και AI τέμνονται στον Ω.

Πρόβλημα 3. Ονομάζουμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό n *παράξενο* αν, για κάθε θετικό διαιρέτη d του n, ο ακέραιος $d(d+1)$ διαιρεί τον $n(n+1)$. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε τέσσερεις διαφορετικούς παράξενους αριθμούς A, B, C και D, ισχύει ότι

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

Εδώ $\gcd(A, B, C, D)$ *είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των* A, B, C *και* D.

Γλώσσα: Ελληνικά

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες