



Language: German

Day: 1

Samstag, 13. April 2024

**Aufgabe 1.** Zwei verschiedene ganze Zahlen  $u$  und  $v$  stehen an einer Tafel. Wir führen eine Reihe von Schritten durch. In jedem Schritt machen wir einen der folgenden beiden Züge:

- (i) Wenn zwei verschiedene Zahlen  $a$  und  $b$  an der Tafel stehen, dann können wir die Zahl  $a + b$  an die Tafel schreiben, falls sie noch nicht dort steht.
- (ii) Wenn drei paarweise verschiedene Zahlen  $a, b$  und  $c$  an der Tafel stehen, und eine ganze Zahl  $x$  die Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  erfüllt, dann können wir die Zahl  $x$  an die Tafel schreiben, falls sie noch nicht dort steht.

Bestimme alle Paare von Startzahlen  $(u, v)$ , für die wir jede beliebige ganze Zahl nach einer endlichen Anzahl von Schritten irgendwann an die Tafel schreiben können.

**Aufgabe 2.** Sei  $ABC$  ein Dreieck mit Umkreis  $\Omega$  und Inkreismittelpunkt  $I$ , sodass  $AC > AB$ . Der Inkreis von  $ABC$  berühre die Seiten  $BC, CA$  und  $AB$  in den Punkten  $D, E$  und  $F$ . Sei  $X$  beziehungsweise  $Y$  ein Punkt auf dem kürzeren der beiden Bögen  $\widehat{DF}$  beziehungsweise  $\widehat{DE}$ , sodass  $\angle BXD = \angle DYC$ . Die Gerade  $XY$  schneide die Gerade  $BC$  in  $K$ . Sei  $T$  der Punkt auf  $\Omega$ , sodass  $KT$  den Kreis  $\Omega$  berührt und  $T$  auf der selben Seite der Geraden  $BC$  liegt wie  $A$ . Zeige, dass sich die Geraden  $TD$  und  $AI$  auf  $\Omega$  schneiden.

**Aufgabe 3.** Eine positive ganze Zahl  $n$  heiße (heisse) *eigenartig*, falls für jeden positiven Teiler  $d$  von  $n$  gilt, dass  $d(d + 1)$  ein Teiler von  $n(n + 1)$  ist. Zeige, dass für vier paarweise verschiedene eigenartige positive ganze Zahlen  $A, B, C$  und  $D$  gilt:

$$\text{ggT}(A, B, C, D) = 1.$$

*Anmerkung:*  $\text{ggT}(A, B, C, D)$  bezeichne die größte (grösste) positive ganze Zahl, die alle vier Zahlen  $A, B, C$  und  $D$  teilt.