Language: **French**

Day: **1**

Samedi 13 avril 2024

Problème 1. Deux entiers distincts u et v sont inscrits sur un tableau. On effectue une série d'étapes et à chaque étape, on réalise une des deux opérations suivantes :

(i) Si deux entiers distincts a et b sont écrits sur le tableau, alors on peut écrire l'entier $a + b$ sur celui-ci, s'il ne s'y trouve pas déjà.

(ii) Si a, b et c sont trois entiers distincts écrits sur le tableau, et si un entier x satisfait l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, alors on peut écrire l'entier x sur celui-ci, s'il ne s'y trouve pas déjà.

Déterminer toutes les paires de départ $\{u, v\}$ depuis lesquelles tout entier peut être obtenu au final après un nombre fini d'étapes.

Problème 2. Soit ABC un triangle tel que $AC > AB$, soit Ω son cercle circonscrit et soit I le centre de son cercle inscrit. Ce cercle inscrit intersecte les côtés BC, CA, AB respectivement en D, E, F. Soient X et Y deux points respectivement sur les plus petits arcs $\widehat{DF}$ et $\widehat{DE}$ du cercle inscrit, tels que $\widehat{BXD} = \widehat{DYC}$. La droite XY intersecte la droite BC en K. Soit T le point de Ω tel que KT est tangent à Ω et tel que T est situé du même côté de BC que A. Prouver que les droites TD et AI se coupent sur Ω.

Problème 3. On appelle *extravagant* un entier n strictement positif si, pour tout diviseur positif d de n, l'entier $d(d+1)$ divise $n(n+1)$. Prouver que pour tout quadruple de nombres entiers extravagants et distincts A, B, C et D, on a la propriété suivante :

$$PGCD(A, B, C, D) = 1.$$

On note $PGCD(A, B, C, D)$ le plus grand entier positif divisant chacun des nombres A, B, C et D.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points