



Language: Dutch

Day: 1

Zaterdag 13 april 2024

**Opgave 1.** Er staan twee verschillende gehele getallen op een bord. We voeren een reeks stappen uit. Elke stap bestaat uit één van de volgende twee handelingen:

- (i) Als  $a$  en  $b$  verschillende gehele getallen zijn op het bord, dan mogen we  $a+b$  op het bord schrijven als het er nog niet staat.
- (ii) Als  $a$ ,  $b$  en  $c$  drie verschillende gehele getallen zijn op het bord, en als een geheel getal  $x$  voldoet aan  $ax^2 + bx + c = 0$ , dan mogen we  $x$  op het bord schrijven als het er nog niet staat.

Bepaal alle paren startgetallen  $(u, v)$  waarvoor geldt dat elk geheel getal na een eindig aantal stappen uiteindelijk op het bord geschreven kan worden.

**Opgave 2.** Zij  $\triangle ABC$  een driehoek waarvoor  $|AC| > |AB|$ , met omgeschreven cirkel  $\Omega$  en middelpunt van de ingeschreven cirkel  $I$ . De ingeschreven cirkel raakt de zijden  $BC$ ,  $CA$  en  $AB$  in respectievelijk  $D$ ,  $E$  en  $F$ . Zij  $X$  en  $Y$  twee punten op respectievelijk de kleine bogen  $DF$  en  $DE$  van de ingeschreven cirkel zo dat  $\angle BXD = \angle DYC$ . De lijn  $XY$  snijdt de lijn  $BC$  in een punt  $K$ . Zij  $T$  het punt op  $\Omega$  zo dat  $KT$  raakt aan  $\Omega$  en  $T$  aan dezelfde kant van de lijn  $BC$  ligt als  $A$ . Bewijs dat de lijnen  $TD$  en  $AI$  elkaar snijden op  $\Omega$ .

**Opgave 3.** We noemen een (strikt) positief geheel getal  $n$  *eigenaardig* als voor elke positieve deler  $d$  van  $n$  geldt dat  $d(d+1)$  een deler is van  $n(n+1)$ . Bewijs dat voor elke vier verschillende eigenaardige getallen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$  geldt dat

$$\text{ggd}(A, B, C, D) = 1.$$

Hier staat  $\text{ggd}(A, B, C, D)$  voor het grootste positieve gehele getal dat  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$  alle vier deelt.