



Language: Danish

Day: 1

Lørdag d. 13. april 2024

Opgave 1. To forskellige hele tal u og v er skrevet på en tavle. Vi udfører en række skridt, og i hvert skridt udfører vi en af de to følgende operationer:

- (i) Hvis a og b er to forskellige hele tal på tavlen, så skriver vi $a + b$ på tavlen hvis det ikke står der allerede.
- (ii) Hvis a , b og c er tre forskellige hele tal på tavlen, og hvis x er et helt tal der opfylder at $ax^2 + bx + c = 0$, så skriver vi x på tavlen hvis det ikke står der allerede.

Bestem alle startpar (u, v) fra hvilke ethvert helt tal kan skrives på tavlen efter et endeligt antal skridt.

Opgave 2. Lad ABC være en trekant hvor $|AC| > |AB|$, og kald dens omskrevne cirkel for Ω og centrum for den indskrevne cirkel for I . Den indskrevne cirkel tangerer BC, CA, AB i henholdsvis D, E, F . Lad X være et punkt på den korteste af cirkelbuerne \widehat{DF} på den indskrevne cirkel, og lad Y være et punkt på den korteste af cirkelbuerne \widehat{DE} på den indskrevne cirkel, så $\angle BXD = \angle DYC$. Lad K være skæringspunktet mellem linjerne XY og BC . Lad T være et punkt på Ω så KT tangerer Ω , og så T er på samme siden af linjen BC som A . Vis at skæringspunktet mellem linjerne TD og AI ligger på Ω .

Opgave 3. Vi kalder et positivt helt tal n *mærkværdigt* hvis der for enhver positiv divisor d i n gælder at $d(d+1)$ går op i $n(n+1)$. Vis at for vilkårlige fire forskellige mærkværdige positive hele tal A, B, C og D gælder at

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

Her er $\gcd(A, B, C, D)$ det største positive hele tal som går op i alle fire tal A, B, C og D .