



Language: Czech

Day: 1

sobota 13. dubna 2024

Úloha 1. Na tabuli jsou napsána dvě různá celá čísla u a v . Postupně vykonáme několik kroků. V každém vykonáme jednu z následujících dvou operací:

- (i) Jestliže a a b jsou různá čísla napsaná na tabuli a číslo $a + b$ tam ještě napsané není, potom jej tam zapíšeme.
- (ii) Jestliže a , b a c jsou tři různá čísla napsaná na tabuli a celé číslo x , které na tabuli ještě napsané není, splňuje rovnost $ax^2 + bx + c = 0$, potom na tabuli zapíšeme x .

Určete všechny počáteční dvojice (u, v) celých čísel takové, že pro libovolné celé číslo existuje konečná posloupnost kroků, po kterých bude toto číslo napsáno na tabuli.

Úloha 2. Necht ABC je trojúhelník splňující $|AC| > |AB|$, označme Ω kružnici jemu opsanou a I střed jeho kružnice vepsané. Kružnice vepsaná se dotýká stran BC , CA , AB po řadě v bodech D , E , F . Necht X a Y jsou po řadě dva body kratších oblouků \widehat{DF} a \widehat{DE} kružnice vepsané takové, že $|\sphericalangle BXD| = |\sphericalangle DYC|$. Přímka XY protíná přímku BC v bodě K . Dále necht T je takový bod kružnice Ω , že přímka KT je tečnou Ω a bod T leží v téže polorovině vyřazené přímkou BC jako bod A . Dokažte, že přímky TD a AI se protínají na kružnici Ω .

Úloha 3. Kladné celé číslo n nazveme *svérázné*, jestliže pro jeho libovolný kladný dělitel d je číslo $n(n+1)$ dělitelné $d(d+1)$. Dokažte, že pro libovolná čtyři různá svérázná kladná celá čísla A , B , C a D platí

$$D(A, B, C, D) = 1.$$

Symbol $D(A, B, C, D)$ značí největší celé číslo, které dělí každé z čísel A , B , C a D .