Language: **Croatian**

Day: **1**

Subota, 13. travnja 2024.

Zadatak 1. Dva različita cijela broja u i v su napisani na ploči. Radimo niz koraka. U svakom koraku radimo jednu od dvije sljedeće operacije:

(i) Ako su a i b različiti cijeli brojevi na ploči, tada možemo napisati broj $a+b$ na ploču, ako već nije napisan na ploči.

(ii) Ako su a, b i c tri različita cijela broja na ploči, i ako cijeli broj x zadovoljava jednakost $ax^2 + bx + c = 0$, tada možemo napisati x na ploču, ako već nije napisan na ploči.

Odredi sve parove početnih brojeva (u, v) takve da se bilo koji cijeli broj može napisati na ploču nakon konačnog niza koraka.

Zadatak 2. Neka je ABC trokut uz $|AC| > |AB|$ i označimo njegovu opisanu kružnicu s Ω i centar upisane kružnice s I. Neka njegova upisana kružnica dira stranice $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ u D, E, F redom. Neka su X i Y dvije točke na manjim lukovima $\widehat{DF}$ i $\widehat{DE}$ upisane kružnice, redom, tako da je $\angle BXD = \angle DYC$. Neka pravac XY siječe pravac BC u K. Neka je T točka na Ω takva da je KT tangenta na Ω i T je na istoj strani pravca BC kao A. Dokaži da se pravci TD i AI sijeku na Ω.

Zadatak 3. Za pozitivan cijeli broj n kažemo da je *čudan* ako, za svaki pozitivan djelitelj d od n, cijeli broj $d(d+1)$ dijeli $n(n+1)$. Dokaži da za svaka četiri različita čudna pozitivna cijela broja A, B, C i D, vrijedi:

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

Ovdje $\gcd(A, B, C, D)$ *označava najveći pozitivan cijeli broj koji dijeli sva četiri broja* A, B, C *i* D.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova