



Language: Chinese (Traditional)

Day: 1

2024 年 4 月 13 日 星期六

**問題 1.** 黑板上寫有兩個不同的整數  $u$  與  $v$ ，我們將實施一系列的操作步驟。在每一步驟時，我們從下列兩種操作中擇一執行：

- (i) 若  $a$  和  $b$  是黑板上的相異數，而且  $a+b$  還沒出現在黑板上，則我們可以在黑板上寫下  $a+b$  這個數。
- (ii) 若  $a, b$  和  $c$  是黑板上的三個相異數，整數  $x$  滿足  $ax^2 + bx + c = 0$  而且  $x$  還沒有出現在黑板上，則我們可以在黑板上寫下  $x$  這個數。

試找出所有的初始數對  $(u, v)$ ，使得任意整數都能在有限次操作步驟後出現在黑板上。

**問題 2.** 在三角形  $ABC$  中， $AC > AB$ ，將其外接圓記為  $\Omega$ ，內心記為  $I$ 。設其內切圓分別與  $BC, CA, AB$  邊交於點  $D, E, F$ 。令  $X, Y$  分別是內切圓的劣弧  $\widehat{DF}$  及  $\widehat{DE}$  上兩點，滿足  $\angle BXD = \angle DYC$ 。設直線  $XY$  與直線  $BC$  交於點  $K$ 。設點  $T$  在圓  $\Omega$  上，滿足  $KT$  與圓  $\Omega$  相切，且  $T, A$  兩點在直線  $BC$  的同側。證明：直線  $TD$  與  $AI$  交在圓  $\Omega$  上。

**問題 3.** 我們稱正整數  $n$  是奇特數，如果對  $n$  的任意正因數  $d$ ，都有整數  $d(d+1)$  整除  $n(n+1)$ 。證明：對任意四個相異的奇特正整數  $A, B, C, D$ ，都有

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

這裡  $\gcd(A, B, C, D)$  是同時整除  $A, B, C, D$  的最大正整數。

Language: Chinese (Traditional)

考試時間：4 小時 30 分  
每題 7 分