



Language: Chinese (Simplified)

Day: 1

2024年4月13日, 星期六

题目 1. 黑板上写有两个不同的整数 u, v . 我们将进行一系列操作, 每一次执行如下两种操作之一:

- (i) 如果 a 和 b 是黑板上两个不同的整数, 且 $a + b$ 还没有出现在黑板上, 那么我们可以在黑板上写下 $a + b$.
- (ii) 如果 a, b 和 c 是黑板上三个不同的整数, 且 x 是一个还没有出现在黑板上的整数满足 $ax^2 + bx + c = 0$, 那么我们可以在黑板上写下 x .

求所有可能的初始数对 (u, v) , 使得任意整数都能在有限次操作后出现在黑板上.

题目 2. 三角形 ABC 中 $AC > AB$, 外接圆为 Ω , 内心为 I , 内切圆与三边 BC, CA, AB 分别相切于点 D, E, F . 设 X 和 Y 分别是内切圆的劣弧 \widehat{DF} 和 \widehat{DE} 上两点, 满足 $\angle BXD = \angle DYC$. 设直线 XY 交直线 BC 于点 K . 设 T 是圆 Ω 上一点满足 KT 与 Ω 相切且 T 与 A 在直线 BC 同侧. 证明: 直线 TD 与 AI 相交于圆 Ω 上.

题目 3. 称一个正整数 n 为奇特数, 如果对 n 的任何一个正因子 d , 整数 $d(d+1)$ 均整除 $n(n+1)$. 证明: 对任意四个两两不同的奇特数 A, B, C, D , 均有

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

这里 $\gcd(A, B, C, D)$ 表示同时整除 A, B, C, D 的最大正整数.