Language: **Bulgarian**

Day: **1**

Събота, 13 април 2024

Задача 1. На дъската са написани две различни цели числа u и v. Извършва се поредица от ходове, като на всеки ход се извършва една от следните две операции:

(i) Ако a и b са две различни числа, присъстващи на дъската, и $a+b$ не е било написано до този момент, то $a+b$ може да бъде написано на дъската.

(ii) Ако a, b и c са три различни числа, присъстващи на дъската, и ако цялото число x изпълнява $ax^2+bx+c=0$ и не е било написано до този момент, то x може да бъде написано на дъската.

Да се намерят всички двойки начални числа (u, v), такива, че което и да е цяло число може да бъде написано на дъската след краен брой ходове.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC, за който $AC > AB$. Нека Ω е описаната около ABC окръжност и I е центърът на вписаната в ABC окръжност. Вписаната окръжност допира страните BC, CA, AB в точки D, E, F съответно. Върху дъгите $\widehat{DF}$ и $\widehat{DE}$ от вписаната окръжност са взети точки X и Y съответно, изпълняващи $\angle BXD = \angle DYC$. Правите XY и BC се пресичат в точка K. Точка T върху Ω е такава, че KT е допирателна до Ω, като T и A лежат от една и съща страна спрямо правата BC. Да се докаже, че правите TD и AI се пресичат върху Ω.

Задача 3. Едно естествено число n се нарича *особено*, ако за всеки положителен делител d на n числото $d(d+1)$ дели $n(n+1)$. Да се докаже, че за всеки четири различни особени естествени числа A, B, C и D е изпълнено:

$$\text{НОД}(A, B, C, D) = 1.$$

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки