



Language: **Bosnian**

Day: **1**

*Subota, 13. april 2024.*

**Zadatak 1.** Na tabli su napisana dva različita cijela broja  $u$  i  $v$ . Pravimo niz koraka, pri čemu u svakom koraku možemo uraditi jednu od sljedeće dvije operacije:

- (i) Ako su  $a$  i  $b$  različiti brojevi s table, možemo na tablu napisati  $a + b$  ukoliko ovaj broj nije već napisan.
- (ii) Ako su  $a, b$  i  $c$  tri različita broja s table, i ako cijeli broj  $x$  zadovoljava  $ax^2 + bx + c = 0$ , možemo na tablu napisati  $x$  ukoliko ovaj broj nije već napisan.

Odrediti sve parove polaznih brojeva  $(u, v)$  takvih da za bilo koji cijeli broj postoji konačan niz koraka kojim taj broj može biti napisan na tablu.

**Zadatak 2.** Neka je  $ABC$  trougao u kojem vrijedi  $AC > AB$ , te označimo njegovu opisane kružnicu sa  $\Omega$  i centar upisane kružnice sa  $I$ . Neka njegova upisana kružnica dodiruje stranice  $BC, CA, AB$  u  $D, E, F$  redom. Neka su  $X$  i  $Y$  tačke na kraćim lukovima  $\widehat{DF}$  i  $\widehat{DE}$  upisane kružnice, redom, tako da vrijedi  $\angle BXD = \angle DYC$ . Neka prava  $XY$  siječe pravu  $BC$  u  $K$ . Neka je  $T$  tačka na  $\Omega$  takva da prava  $KT$  dodiruje  $\Omega$  i  $T$  leži sa iste strane prave  $BC$  kao i  $A$ . Dokazati da se prave  $TD$  i  $AI$  sijeku na  $\Omega$ .

**Zadatak 3.** Za pozitivan cijeli broj  $n$  kažemo da je *čudan* ako, za bilo koji pozitivan djelioc  $d$  od  $n$ , broj  $d(d+1)$  dijeli  $n(n+1)$ . Dokazati da za bilo koja četiri različita čudna pozitivna cijela broja  $A, B, C$  i  $D$  vrijedi sljedeće:

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

*Ovdje  $\gcd(A, B, C, D)$  označava najveći pozitivan cijeli broj koji dijeli svaki od brojeva  $A, B, C$  i  $D$ .*