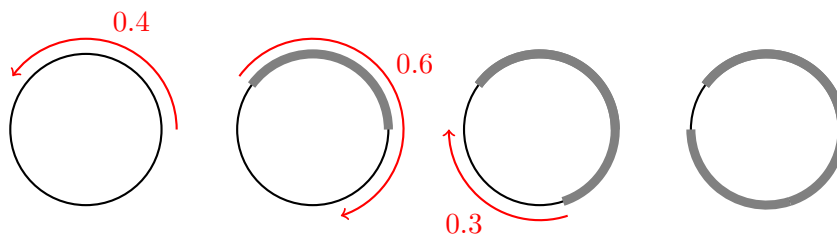


Неділя, 16 квітня, 2023

**Задача 4.** Равлик Степан сидить у деякій точці кола довжини 1. Для заданої нескінченної послідовності додатних дійсних чисел  $c_1, c_2, c_3, \dots$ , Степан послідовно проповзає відстані  $c_1, c_2, c_3, \dots$  вздовж кола, на кожному проповзанні обираючи повзти йому за рухом годинникової стрілки чи проти руху годинникової стрілки.

Наприклад, якщо послідовність  $c_1, c_2, c_3, \dots$  задано як  $0.4, 0.6, 0.3, \dots$ , то Степан може почати проповзання таким чином:



Визначіть найбільшу сталу  $C > 0$  з такою властивістю: для довільної послідовності додатних дійсних чисел  $c_1, c_2, c_3, \dots$  такої, що  $c_i < C$  для всіх  $i$ , Степан може (після дослідження послідовності) гарантувати, що на колі знайдеться точка, у якій він ніколи не був та не проповзав через неї.

**Задача 5.** Задано натуральне число  $s \geq 2$ . Для кожного натурального  $k$  його *Великодним числом* назвемо число  $k'$ , яке визначається у такий спосіб: запишемо  $k$  як  $as + b$ , де  $a, b$  – цілі невід'ємні числа і  $b < s$ , тоді  $k' = bs + a$ . Для натурального числа  $n$  розглянемо нескінченну послідовність  $d_1, d_2, \dots$ , де  $d_1 = n$  і  $d_{i+1}$  є Великодним числом для числа  $d_i$  при кожному натуральному  $i$ .

Доведіть, що ця послідовність містить 1 тоді і тільки тоді, коли остача від ділення  $n$  на  $s^2 - 1$  дорівнює 1 або  $s$ .

**Задача 6.** Нехай  $\Omega$  – описане коло трикутника  $ABC$ . Через  $S_b$  та  $S_c$ , відповідно, позначимо середини дуг  $AC$  і  $AB$ , що не містять третю вершину трикутника, а через  $N_a$  позначимо середину дуги  $BAC$  (дуга  $BC$ , що містить вершину  $A$ ). Нехай  $\omega_b$  – коло, що дотикається до прямої  $AB$  та внутрішнім чином дотикається до  $\Omega$  у точці  $S_b$ , та нехай  $\omega_c$  – коло, що дотикається до прямої  $AC$  і внутрішнім чином дотикається до  $\Omega$  у точці  $S_c$ . Доведіть, що пряма  $IN_a$  і пряма, що проходить через точки перетину кіл  $\omega_b$  та  $\omega_c$ , перетинаються на колі  $\Omega$ , де через  $I$  позначено центр вписаного кола трикутника  $ABC$ .

Language: Ukrainian

Час виконання: 4 години 30 хвилин  
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Задачі мають лишатися конфіденційними до неділі 16 квітня, 22:00 UTC (00:00 (Понеділок) за центральноєвропейським часом).