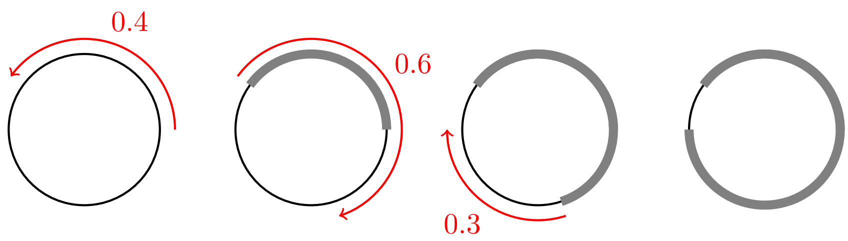
Language: **Spanish**

Day: **2**

Domingo, 16 de abril de 2023

Problema 4. El caracolito Turbo está sobre un punto de una circunferencia de longitud 1. Sea $c_1, c_2, c_3, \ldots$ una sucesión de números reales positivos. Turbo se arrastra sucesivamente distancias $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sobre la circunferencia, eligiendo cada vez el sentido: horario o antihorario.

Por ejemplo, si la sucesión $c_1, c_2, c_3, \ldots$ es $0.4, 0.6, 0.3, \ldots$, entonces Turbo podría haber elegido arrastrarse como a continuación:



Determine la mayor constante $C > 0$ con la propiedad siguiente: para toda sucesión de números reales positivos $c_1, c_2, c_3, \ldots$ tales que $c_i < C$ para todo i, Turbo puede asegurar (tras haber estudiado la sucesión) que hay un punto de la circunferencia al que nunca llegará ni por el que nunca se arrastrará.

Problema 5. Sea $s \geqslant 2$ un entero positivo. Para cada entero positivo k se define su *torcimiento* k' como sigue: si k se escribe como $as + b$, con a, b enteros no negativos y con $b < s$, entonces $k' = bs + a$. Sea n un entero positivo, considérese la sucesión inifinita $d_1, d_2, \ldots$ con $d_1 = n$ y d_{i+1} el torcimiento de d_i para cada i entero positivo.

Demuestre que esta sucesión contiene 1 si y sólo si el resto (o residuo) de la división de n por $s^2 - 1$ es 1 o s.

Problema 6. Sea ABC un triángulo con circunferencia circunscrita Ω. Se denota por S_b y S_c los puntos medios de los arcos AC y AB que no contienen el tercer vértice del triángulo, respectivamente. Sea N_a el punto medio del arco BAC (el arco BC que contiene a A). Sea I el incentro of ABC. Sea ω_b el círculo que es tangente a AB y tangente internamente a Ω en S_b, y sea ω_c el círculo que es tangente a AC y tangente internamente a Ω en S_c. Demuestre que la recta IN_a y la recta que pasa por las intersecciones de ω_b y ω_c, se intersectan sobre Ω.

El incentro de un triángulo es el centro de su incírculo, el círculo dentro del triángulo que es tangente a sus tres lados.

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Los problemas son confidenciales hasta el lunes 17 de abril a las 22:00 UTC (00:00 del martes en Eslovenia).