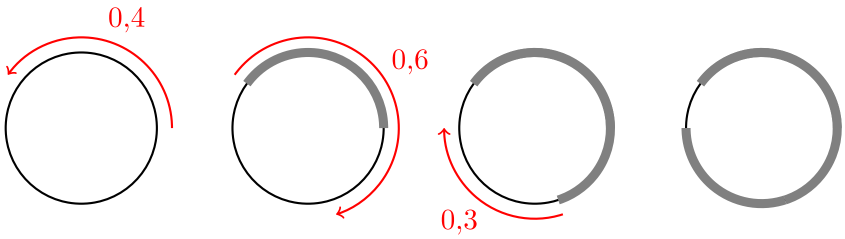
Language: **Slovenian**

Day: **2**

Nedelja, 16. april 2023

Naloga 4. Jež Juš se nahaja na točki na krožnici z obsegom 1. Za dano neskončno zaporedje pozitivnih realnih števil $c_1, c_2, c_3, \ldots$ Juš zaporedoma prehodi razdalje $c_1, c_2, c_3, \ldots$ po krožnici, pri čemer se vsakič odloči, ali se bo sprehajal v smeri urinega kazalca ali v nasprotni smeri.

Na primer, če imamo zaporedje $c_1 = 0{,}4$, $c_2 = 0{,}6$, $c_3 = 0{,}3$ in tako dalje, bi se lahko začel Juš sprehajati takole:



Določi največjo konstanto $C > 0$ z naslednjo lastnostjo: za vsako zaporedje pozitivnih realnih števil $c_1, c_2, c_3, \ldots$, kjer je $c_i < C$ za vsak i, lahko Juš (ko preuči zaporedje) zagotovi, da je na krožnici neka točka, ki je ne bo nikoli obiskal in se ne bo nikoli sprehodil preko nje.

Naloga 5. Dano je naravno število $s \geqslant 2$. Za vsako naravno število k definiramo njegov *zasuk* k' na sledeč način: zapišemo k v obliki $as + b$, kjer sta a in b nenegativni celi števili in $b < s$; potem je $k' = bs + a$. Za naravno število n si oglejmo neskončno zaporedje $d_1, d_2, \ldots$, kjer je $d_1 = n$ in je d_{i+1} zasuk števila d_i za vsako naravno število i.

Pokaži, da to zaporedje vsebuje število 1, natanko tedaj ko je ostanek števila n pri deljenju s $s^2 - 1$ bodisi 1 bodisi s.

Naloga 6. Naj bo ABC trikotnik in Ω njegova očrtana krožnica. Naj bosta S_b in S_c zaporedoma razpolovišči lokov AC in AB, ki ne vsebujeta tretjega oglišča. Naj N_a označuje središče loka BAC (lok BC, ki vsebuje A). Naj bo I središče trikotniku ABC včrtane krožnice. Naj bo ω_b krožnica, ki se dotika premice AB in se znotraj dotika Ω v točki S_b, in naj bo ω_c krožnica, ki se dotika premice AC in se znotraj dotika Ω v točki S_c. Pokaži, da se premica IN_a in premica, ki poteka skozi presečišči krožnic ω_b in ω_c sekata na Ω.

Language: Slovenian

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk

Naloge so tajne do nedelje, 16. aprila, do 22:00 UTC (00:00 (ponedeljek) srednjeevropski poletni čas).