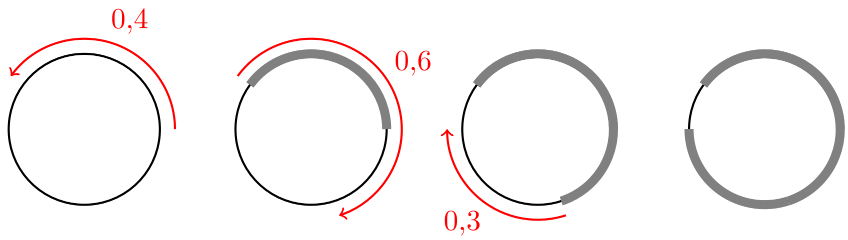
Language: **Slovak**

Day: 2

nedeľa, 16. apríla 2023

Úloha 4. Slimák Turbo si hovie na niektorom bode kružnice s obvodom 1. Keď Turbo dostane nekonečnú postupnosť reálnych čísel $c_1, c_2, c_3, \ldots$, tak sa postupne preplazí po kružnici o vzdialenosti $c_1, c_2, c_3, \ldots$, pričom sa vždy rozhodne, či sa o danú vzdialenosť preplazí v smere alebo proti smeru hodinových ručičiek.

Napríklad, ak dostane postupnosť $c_1, c_2, c_3, \ldots$, ktorá je 0,4; 0,6; 0,3; …, tak sa Turbo môže začať plaziť tak ako na obrázku:



Určte najväčšiu konštantu $C > 0$ s nasledujúcou vlastnosťou: keď Turbo dostane ľubovoľnú postupnosť kladných reálnych čísel $c_1, c_2, c_3, \ldots$ takú, že pre všetky i platí $c_i < C$, tak môže (po tom, ako si prezrie danú postupnosť) zabezpečiť, že na kružnici bude nejaký bod, ktorý nikdy nenavštívi alebo cez ktorý sa nikdy nepreplazí.

Úloha 5. Dané je kladné celé číslo $s \geq 2$. Pre každé kladné celé číslo k, definujme jeho *zvrat* k' nasledovne: keď napíšeme k v tvare $as + b$, kde a, b sú nezáporné celé čísla a $b < s$, tak $k' = bs + a$. Pre kladné celé číslo n, uvažujme nekonečnú postupnosť $d_1, d_2, \ldots$, v ktorej platí, že $d_1 = n$ a že pre každé kladné celé číslo i je číslo d_{i+1} zvratom čísla d_i.

Dokážte, že táto postupnosť obsahuje číslo 1 práve vtedy, keď číslo n dáva po delení číslom $s^2 - 1$ zvyšok 1 alebo s.

Úloha 6. Nech Ω je kružnica opísaná danému trojuholníku ABC. Označme S_b a S_c postupne stredy oblúkov AC a AB, ktoré neobsahujú tretí z vrcholov trojuholníka ABC. Ďalej označme N_a stred oblúka BAC (oblúk BC, ktorý obsahuje A). Uvažujme, že I je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Napokon nech ω_b je kružnica, ktorá sa dotýka AB a má s kružnicou Ω vnútorný dotyk v bode S_b, a nech ω_c je kružnica, ktorá sa dotýka AC a má s kružnicou Ω vnútorný dotyk v bode S_c. Dokážte, že priamka IN_a sa s priamkou prechádzajúcou priesečníkmi kružníc ω_b a ω_c pretína na kružnici Ω.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu možno získať 7 bodov

Zadania úloh sú tajné do nedele 16. apríla o 24:00.