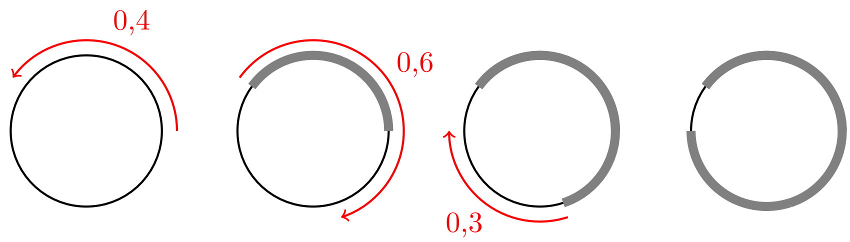
Language: **Serbian**

Day: **2**

nedelja, 16.4.2023.

Zadatak 4. Puž Turbo se nalazi u nekoj tački kružnice obima 1. Dat je beskonačan niz pozitivnih realnih brojeva $c_1, c_2, c_3, \ldots$ Turbo redom prelazi rastojanja $c_1, c_2, c_3, \ldots$ krećući se po kružnici, svaki put birajući da li će to biti u smeru kazaljke na satu ili u smeru obrnutom od smera kazaljke na satu.

Na primer, za niz $c_1, c_2, c_3, \ldots$ koji je 0,4 , 0,6 , 0,3 , ... Turbo se može kretati na sledeći način:



Odrediti najveću konstantu $C > 0$ za koju je zadovoljeno sledeće: Za svaki niz pozitivnih realnih brojeva $c_1, c_2, c_3, \ldots$ takav da je $c_i < C$ za sve i, Turbo može (nakon što pogleda ceo niz) da obezbedi postojanje tačke na kružnici u koju nikada neće doći niti preko nje preći.

Zadatak 5. Dat je prirodan broj $s \geqslant 2$. Za svaki prirodan broj k definišemo njegovo *zavrtanje* k' na sledeći način: Ako predstavimo k kao $as + b$, gde su a, b nenegativni celi brojevi i $b < s$, onda je $k' = bs + a$. Za prirodan broj n, posmatrajmo beskonačan niz $d_1, d_2, \ldots$, gde je $d_1 = n$, a d_{i+1} je zavrtanje d_i, za svaki prirodan broj i.

Dokazati da ovaj niz sadrži 1 ako i samo ako je ostatak pri deljenju n sa $s^2 - 1$ jednak 1 ili s.

Zadatak 6. Dat je trougao ABC sa opisanom kružnicom Ω. Označimo sa S_b i S_c, respektivno, središta onih lukova AC i AB koji ne sadrže treće teme trougla. Označimo sa N_a središte luka BAC (onog luka BC koji sadrži A). Neka je I centar kružnice upisane u trougao ABC. Neka je ω_b kružnica tangentna na pravu AB koja dodiruje iznutra kružnicu Ω u tački S_b, i neka je ω_c kružnica tangentna na pravu AC koja dodiruje iznutra kružnicu Ω u tački S_c. Pokazati da se prava IN_a, i prava koja prolazi kroz preseke ω_b i ω_c, seku na Ω.

Language: Serbian

Vreme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.

Zadaci se ne smeju deliti ni objavljivati pre nedelje 16. aprila u 22:00 UTC (odnosno pre ponoći sa nedelje na ponedeljak po lokalnom vremenu).