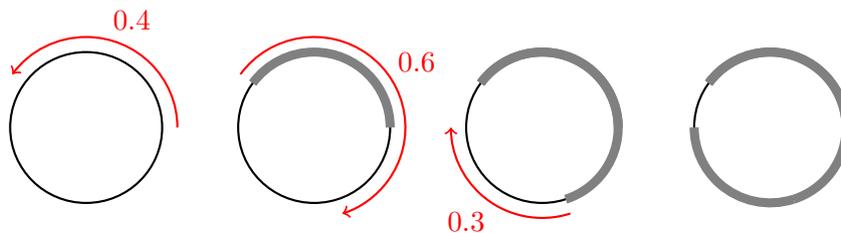


Воскресенье, 16 апреля 2023 г.

Задача 4. Улитка Турбо сидит в некоторой точке окружности длиной 1. Дана бесконечная последовательность действительных положительных чисел c_1, c_2, c_3, \dots . Турбо последовательно проползает расстояния c_1, c_2, c_3, \dots по этой окружности, каждый раз выбирая ползти ли ей по часовой стрелке или против часовой стрелки.

Например, если последовательность c_1, c_2, c_3, \dots это $0.4, 0.6, 0.3, \dots$, то Турбо может начать ползти следующим образом:



Определите наибольшую константу $C > 0$ со следующим свойством: для любой последовательности действительных положительных чисел c_1, c_2, c_3, \dots таких, что $c_i < C$ для каждого i , Турбо может (после изучения последовательности) гарантировать, что на окружности есть точка, которую она никогда не посетит и не переползёт.

Задача 5. Дано целое положительное число $s \geq 2$. Для каждого целого положительного числа k определим его *реверсное* значение k' следующим образом: запишем k в виде $as + b$, где a, b – целые неотрицательные числа и $b < s$, затем положим $k' = bs + a$. Для целого положительного числа n рассмотрим бесконечную последовательность чисел d_1, d_2, \dots , где $d_1 = n$ и d_{i+1} – реверсное значение числа d_i для каждого целого положительного значения i .

Докажите, что эта последовательность содержит 1 тогда и только тогда, когда остаток при делении числа n на число $s^2 - 1$ равен либо 1, либо s .

Задача 6. Дан треугольник ABC с описанной около него окружностью Ω . Пусть S_b и S_c – соответственно середины дуг AC и AB , не содержащих третью вершину треугольника ABC . Пусть N_a – середина дуги BAC (дуги BC , содержащей вершину A). Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Пусть ω_b – окружность, которая касается прямой AB и внутренним образом касается окружности Ω в точке S_b , и пусть ω_c – окружность, которая касается прямой AC и внутренним образом касается окружности Ω в точке S_c . Докажите, что прямая IN_a и прямая, проходящая через точки пересечения окружностей ω_b и ω_c , пересекаются на окружности Ω .

Language: Russian

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

Условия задач запрещено разглашать до 00:00 ночи 17 апреля 2023 г.