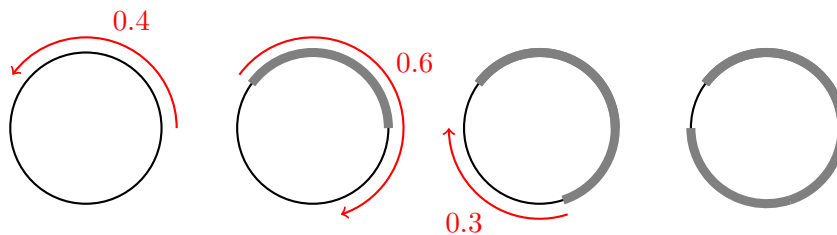


*Domingo, 16 de abril 2023*

**Problema 4.** Turbo, a lesma, está sobre um ponto de uma circunferência de perímetro 1. Dada uma sequência infinita de números reais positivos  $c_1, c_2, c_3, \dots$ , Turbo percorre, sucessivamente, as distâncias  $c_1, c_2, c_3, \dots$  ao redor da circunferência, cada vez escolhendo fazê-lo no sentido horário ou anti-horário.

Por exemplo, se a sequência  $c_1, c_2, c_3, \dots$  é dada por  $0.4, 0.6, 0.3, \dots$ , então Turbo pode começar o seu trajeto como segue:



Determine a maior constante  $C > 0$  com a seguinte propriedade: para toda sequência de números reais positivos  $c_1, c_2, c_3, \dots$  com  $c_i < C$  para todo  $i$ , Turbo pode (após estudar a sequência) garantir que existe um ponto da circunferência que nunca será visitado ou atravessado.

**Problema 5.** É dado um inteiro positivo  $s \geq 2$ . Para cada inteiro positivo  $k$ , definimos o seu *giro*  $k'$  como segue: se  $k$  é escrito como  $as + b$ , onde  $a, b$  são inteiros não negativos e  $b < s$ , então  $k' = bs + a$ . Dado o inteiro positivo  $n$ , considere a sequência infinita  $d_1, d_2, \dots$ , em que  $d_1 = n$  e  $d_{i+1}$  é o giro de  $d_i$  para cada inteiro positivo  $i$ .

Mostre que essa sequência contém o 1 se, e somente se, o resto quando  $n$  é dividido por  $s^2 - 1$  é 1 ou  $s$ .

**Problema 6.** Seja  $ABC$  um triângulo com circuncírculo  $\Omega$ . Sejam  $S_b$  e  $S_c$  os pontos médios dos arcos  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, que não contêm o terceiro vértice. Seja  $N_a$  o ponto médio do arco  $BAC$  (o arco  $BC$  que contém  $A$ ). Seja  $I$  o incentro de  $ABC$ . Seja  $\omega_b$  a circunferência tangente a  $AB$  e internamente tangente a  $\Omega$  em  $S_b$  e seja  $\omega_c$  a circunferência tangente a  $AC$  e internamente tangente a  $\Omega$  em  $S_c$ . Mostre que a reta  $IN_a$  e a reta que passa pelas interseções de  $\omega_b$  e  $\omega_c$  se encontram em  $\Omega$ .

*O incentro de um triângulo é o centro do seu incírculo, a circunferência interna ao triângulo que é tangente aos seus três lados.*