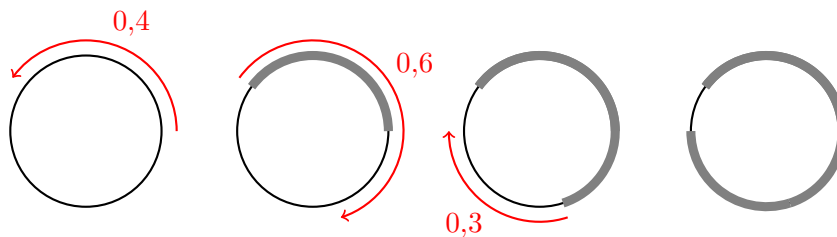


Niedziela, 16 kwietnia 2023

Zadanie 4. Ślimak Kamil siedzi na okręgu o obwodzie 1. Otrzymał nieskończony ciąg dodatnich liczb rzeczywistych c_1, c_2, c_3, \dots , Kamil zaczyna zataczać na okręgu kolejno łuki długości c_1, c_2, c_3, \dots za każdym razem z osobną decyzją, czy będzie pełznął w kierunku zgodnym czy przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Przykładowo, dla ciągu $c_1 = 0,4; c_2 = 0,6; c_3 = 0,3; \dots$, początek trasy Kamila mógłby wyglądać następująco:



Wyznaczyć największą stałą $C > 0$ o następującej własności: dla dowolnego ciągu dodatnich liczb rzeczywistych c_1, c_2, c_3, \dots takiego, że $c_i < C$ dla wszystkich i , Kamil może (po poznaniu wartości ciągu) zaplanować trasę tak, aby istniał na okręgu punkt, przez który Kamil nigdy nie przepełznął ani którego nigdy nie odwiedził.

Zadanie 5. Dana jest dodatnia liczba całkowita $s \geq 2$. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej k , definiujemy jej *przekręt* k' w następujący sposób: zapisujemy k jako $as + b$ dla nieujemnych liczb całkowitych a, b takich, że $b < s$, a następnie kładziemy $k' = bs + a$. Dla dodatniej liczby całkowitej n , rozważmy nieskończony ciąg d_1, d_2, \dots gdzie $d_1 = n$ oraz d_{i+1} jest przekrętem d_i dla każdej dodatniej całkowitej liczby i .

Wykazać, że ciąg ten zawiera liczbę 1 wtedy i tylko wtedy gdy reszta n z dzielenia przez $s^2 - 1$ wynosi 1 lub s .

Zadanie 6. Niech ABC będzie trójkątem, a Ω okręgiem nań opisanym. Punkty S_b oraz S_c są odpowiednio środkami łuków AC oraz AB niezawierających przeciwległego wierzchołka. Punkt N_a jest środkiem łuku BAC (łuku BC zawierającego A). Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ABC . Niech ω_b będzie okręgiem stycznym do AB oraz stycznym wewnątrz do Ω w punkcie S_b oraz niech ω_c będzie okręgiem stycznym do AC oraz stycznym wewnątrz do Ω w punkcie S_c . Udowodnić że prosta IN_a oraz prosta przechodząca przez punkty przecięcia ω_b i ω_c przecinają się na Ω .

Okrąg wpisany w trójkąt to okrąg wewnątrz trójkąta styczny do wszystkich jego boków.

Language: Polish

Czas pracy: 4 godziny 30 minut

Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów

Zadania są utajnione do niedzieli 16 kwietnia, do godziny 22:00 czasu UTC (do północy z 16-ego na 17-ego kwietnia czasu środkowoeuropejskiego).