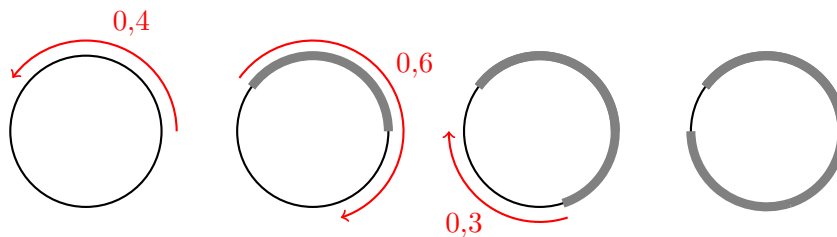


Søndag 16. april 2023

Oppgave 4. Sneglen Turbo sitter på et punkt på en sirkel med omkrets 1. Det er gitt en uendelig følge c_1, c_2, c_3, \dots av positive reelle tall. Turbo kravler avstandene c_1, c_2, c_3, \dots en etter en i den rekkefølgen langs sirkelperiferien, og for hver avstand velger hun om hun vil kravle med eller mot klokka.

Hvis for eksempel følgen c_1, c_2, c_3, \dots er $0,4, 0,6, 0,3, \dots$ så kan Turbo begynne å kravle på følgende måte:



Bestem den største konstanten $C > 0$ som oppfylder følgende: for hver uendelige følge c_1, c_2, c_3, \dots av positive reelle tall med $c_i < C$ for alle i , så kan Turbo (etter å ha studert følgen) sørge for at det er et punkt på sirkelen som hun aldri står på eller kravler over.

Oppgave 5. La $s \geq 2$ være et positivt heltall. For hvert positive heltall k så definerer vi *tvisten* k' på følgende måte: skriv k på formen $as + b$, der a og b er ikke-negative heltall med $b < s$, og la $k' = bs + a$. For det positive heltallet n , se på den uendelige følgen d_1, d_2, \dots der $d_1 = n$ og d_{i+1} er tvisten til d_i for alle positive heltall i .

Bevis at denne følgen inneholder tallet 1 hvis og bare hvis resten når n deles med $s^2 - 1$ er enten 1 eller s .

Oppgave 6. La ABC være en trekant med omsirkel Ω . La S_b og S_c være midtpunktene til henholdsvis sirkelbuen AC som ikke inneholder B og sirkelbuen AB som ikke inneholder C . La N_a være midtpunktet på sirkelbuen BAC (dvs. sirkelbuen BC som går gjennom A). La I være innsenteret i ABC . La ω_b være sirkelen som tangerer AB og som tangerer Ω innvendig i punktet S_b , og la ω_c være sirkelen som tangerer AC og som tangerer Ω innvendig i S_c . Vis at linjen IN_a og linjen gjennom skjæringspunktene til ω_b og ω_c møtes på Ω .

Innsenteret i en trekant er sentrum i dens innskrevne sirkel (dvs. sirkelen i trekanten som tangerer alle trekantens sider).

Language: Norwegian

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

Oppgavene er hemmelige frem til søndag 16. april kl. 22:00 UTC (mandag kl 00:00 norsk tid).