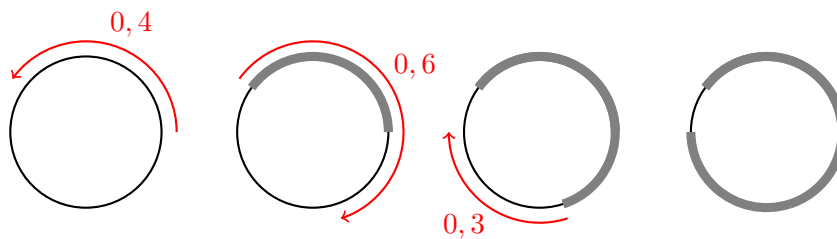


Недела, 16 април, 2023

Задача 4. Полжавот Турбо се наоѓа во точка од кружница со периметар 1. За дадена бесконечна низа од позитивни реални броеви c_1, c_2, c_3, \dots . Турбо успешно лази поминувајќи растојанија c_1, c_2, c_3, \dots по кружницата, притоа во секој чекор избира во која насока ќе лази, дали во насока или спротивно од насоката на стрелките на часовникот.

На пример, ако низата растојанија c_1, c_2, c_3, \dots е $0, 4; 0, 6; 0, 3; \dots$, тогаш Турбо почнува да лази на следниот начин:



Одреди ја најголемата константа $C > 0$ која го задоволува следното својство: за секоја низа од позитивни реални броеви c_1, c_2, c_3, \dots , за кои, за секое i важи $c_i < C$, Турбо може (откако ќе ја проучи низата) да е сигурен дека постои точка на кружницата во која нема да застане, ниту пак преку неа ќе помине.

Задача 5. Даден е природен број $s \geq 2$. За секој природен број k , дефинираме негово *извртување* k' на следниот начин: го запишуваме k во облик $as + b$, каде a, b се ненегативни цели броеви и $b < s$, и тогаш ставаме $k' = bs + a$. За природниот број n , ја разгледуваме бесконечната низа d_1, d_2, \dots , каде $d_1 = n$ и d_{i+1} е извртувањето на d_i за секој природен број i .

Докажи дека оваа низа го содржи бројот 1 ако и само ако остатокот при делењето на n со $s^2 - 1$ е или 1 или s .

Задача 6. Нека ABC е триаголник со опишана кружница Ω . Со S_b и S_c соодветно, ги означуваме средините на кружните лац AC и AB така што лаците не го содржат третото теме. Со N_a е означена средината на лакот BAC (тоа е лакот BC кој ја содржи точката A). Со I е означен центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC . Нека ω_b е кружницата која ја допира страната AB и одвнатре ја допира кружницата Ω во точката S_b , и нека ω_c е кружница која ја допира страната AC и одвнатре ја допира кружницата Ω во точката S_c . Докажи дека правата IN_a и правата која минува низ пресеците на кружниците ω_b и ω_c , се сечат на кружницата Ω .

Впишана кружница на триаголникот е кружницата која ги допира сите три страни на триаголникот.

Language: Macedonian

Време: 4 часа и 30 минути
Секоја задача носи 7 поени

Проблемите се од доверлива природа заклучно со недела, 16 април, 22:00 UTC (00:00 (понеделник) по централно европско време (CET)).