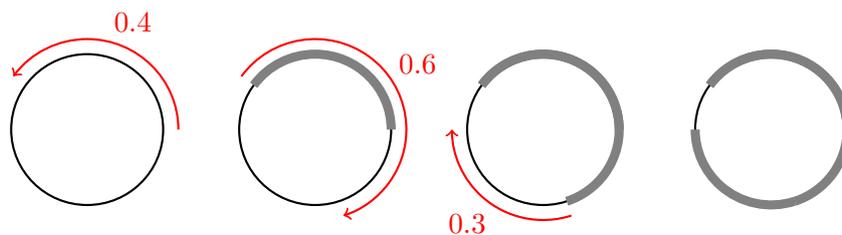


2023 年 4 月 16 日 日曜日

**問題 4.** かたつむりのターボ君が、周の長さが 1 の円周上のある 1 点にいる。正の実数からなる無限数列  $c_1, c_2, c_3, \dots$  が与えられたとき、ターボ君は、円周に沿って順に  $c_1, c_2, c_3, \dots$  の距離を移動する。ただし、各移動においてターボ君は時計回りまたは反時計回りのどちらに動くかを決めることができる。

例えば、数列  $c_1, c_2, c_3, \dots$  として  $0.4, 0.6, 0.3, \dots$  が与えられたとき、ターボ君の移動の例として以下の図のようなものが考えられる。



このとき、以下の条件をみたす正の実数  $C$  の最大値を求めよ。

各項が  $C$  より小さい実数からなるどのような正の実数列  $c_1, c_2, c_3, \dots$  が与えられたとしても、ターボ君は上手く行動することで、円周上にターボ君が一度も訪れない点が存在するようにできる。

**問題 5.** 正の整数  $s \geq 2$  が与えられている。正の整数  $k$  について、そのひねり  $k'$  を次のように定義する： $b < s$  なる非負整数  $a, b$  を用いて  $k$  を  $as + b$  と表示したとき、 $k' = bs + a$  とする。正の整数  $n$  に対し、無限数列  $d_1, d_2, \dots$  であって、 $d_1 = n$  かつ正の整数  $i$  について  $d_{i+1}$  が  $d_i$  のひねりであるようなものを考える。

この数列の何番目かの項が 1 になるための必要十分条件は、 $n$  を  $s^2 - 1$  で割った余りが 1 または  $s$  であることを示せ。

**問題 6.** 三角形  $ABC$  があり、その外接円を  $\Omega$  とする。点  $S_b, S_c$  を、それぞれ  $B$  を含まない弧  $AC$ ,  $C$  を含まない弧  $AB$  の中点とする。点  $N_a$  を、弧  $BAC$  ( $A$  を含む弧  $BC$ ) の中点とする。点  $I$  を三角形  $ABC$  の内心とする。 $\omega_b$  を直線  $AB$  に接し  $\Omega$  に  $S_b$  で内接する円とし、 $\omega_c$  を直線  $AC$  に接し  $\Omega$  に  $S_c$  で内接する円とする。このとき、直線  $IN_a$  と、 $\omega_b$  と  $\omega_c$  の 2 交点を通る直線は、 $\Omega$  上に共有点を持つことを示せ。

三角形の内心とは、その三角形の内接円、つまりその三角形の内部にあり、3 辺すべてに接するような円の中心のことである。

Language: Japanese

時間: 4 時間 30 分

各問 7 点

問題は 4 月 17 日 (月曜日) の日本標準時 7 時 (協定世界時 4 月 16 日 22 時) まで秘匿すること。